中心極限定理

Amuta (X: @Amuta151)

2023/12/11

概 要

本稿はりす. さん（@riss_gendarmery）主催の Math Advent Calendar 2023 に寄稿させていただくものです. 最近中心極限定理の復習をする必要があったのでせっかくならとまとめてみました. 本来もう少しいろいろ書きたかったのですが諸事情あり無難な範囲にとどめました. 本稿では Lévy の特性関数論による中心極限定理の証明を実解析の視点から整理し, なるべく全体の流れがわかるようにしてみました.

1 導入

定義 1. （確率測度）
可測空間 $(\Omega, \mathfrak{F})$ 上の測度 $\mathbb{P}$ が $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ を満たすとき Ω 上の確率測度という.

定義 2. （確率変数）
確率空間 $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ から $\mathbb{R}$ への可測関数 $X : \Omega \to \mathbb{R}$ を確率変数という.

定義 3. （確率分布）
確率変数 $X : \Omega \to \mathbb{R}$ による $\mathbb{P}$ の押し出し測度,

$$\mathbb{P}_X(M) := \mathbb{P}(X^{-1}(M)) \quad (M \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})),$$

を $\mathbb{R}$ 上の X の確率分布という. ただし $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$ 上の Borel 可測集合族である.

定義 4. （Borel 測度/正則測度）
$\mathbb{R}$ 上の Borel 可測集合族を $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ と表す. 測度 $\mu : \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ を $\mathbb{R}$ 上の Borel 測度という. また Borel 測度 μ の完備化を μ の Lebesgue 拡大といい, ある Borel 測度の Lebesgue 拡大になっているような測度を正則測度という.

定義 5. （測度の合成積）
$\mathbb{R}$ 上の正則測度 μ, ν の合成積を,

$$\mu * \nu(E) = \int \chi_E(x + y) d\mu(x) d\nu(y) \quad (E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})),$$

として定める.

命題 6. （確率変数の和の分布）
確率変数 X, Y はそれぞれ正則確率分布 μ, ν に独立に従うとすると $X + Y$ は $\mu * \nu$ に従う.

Proof. $E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ とする．$\mathrm{Add}(x,y) := x+y$ とすると，

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{X+Y}(E) &= \mathbb{P}((X+Y)^{-1}(E)),\\ &= \mathbb{P}((X,Y)^{-1}\circ \mathrm{Add}^{-1}(E)),\\ &= \mathbb{P}_{(X,Y)}(\mathrm{Add}^{-1}(E)),\\ &= \int \chi_E(x+y)d\mathbb{P}_{(X,Y)},\\ &= \int \chi_E(x+y)d\mathbb{P}_X d\mathbb{P}_Y,\\ &= \int \chi_E(x+y)d\mu(x)d\nu(y),\\ &= \mu * \nu(E),\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし $\mathbb{P}_{(X,Y)} = \mathbb{P}_X\mathbb{P}_Y$ は独立性による．

□

2 特性関数と Fourier 変換

定義 7. （特性関数/Fourier 変換）
$\mathbb{R}$ 上の正則確率測度 λ に対し，

$$\hat{\lambda}(\xi) := \mathbb{E}_\lambda[e^{-2\pi i\xi X}] = \int e^{-2\pi i\xi x}d\lambda(x),$$

を λ の特性関数もしくは Fourier 変換という．

定義 8. （$C_0(\mathbb{R})$）
$\mathbb{R}$ 上の連続関数のうち $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ が成り立つ関数全体を $C_0(\mathbb{R})$ と表す．

定義 9. （分布収束）
正則確率測度 $\{\lambda_i\}, \lambda$ について，$\{\lambda_i\}$ が λ に分布収束するとは，

$$\mathbb{E}_{\lambda_i}[f(X)] \to \mathbb{E}_\lambda[f(X)] \quad (f \in C_0(\mathbb{R})),$$

が成り立つこと，すなわち，

$$\int f(x)d\lambda_i(x) \to \int f(x)d\lambda(x) \quad (f \in C_0(\mathbb{R})),$$

が成り立つことである．分布収束することを $\lambda_i \xrightarrow{d} \lambda$ と表す．

定理 10. $\mathbb{R}$ 上の正則確率測度の列 $\{\lambda_i\}$ が各点収束で $\hat{\lambda}_i \to \hat{\lambda}$ を満たすとき，$\lambda_i \xrightarrow{d} \lambda$ が成り立つ．

Proof. Fourier 変換の性質と Schwartz 空間の $C_0(\mathbb{R})$ における稠密性による．

□

補題 11. （Fourier 変換の微分）
$\mathbb{R}$ 上の正則確率測度 λ に対し，$\hat{\lambda}(\xi)$ は微分可能で，

$$\hat{\lambda}'(\xi) = (-2\pi i\xi)\int xd\lambda(x) = (-2\pi i\xi)\mathbb{E}[X],$$
$$\hat{\lambda}''(\xi) = (-4\pi^2\xi^2)\int x^2d\lambda(x) = (-4\pi^2\xi^2)\mathbb{E}[X^2],$$

が成り立つ．

命題 12. （標準正規分布の Fourier 変換）

$$\nu(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},$$

とすると，

$$\hat{\nu}(\xi)=e^{-2\pi^2\xi^2}.$$

Proof.

$$\begin{aligned}\hat{\nu}(\xi)&=\int e^{-2\pi i\xi x}\nu(x)dx,\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-\frac{1}{2}(x+2\pi i\xi)^2}e^{-2\pi^2\xi^2}dx,\\&=e^{-2\pi^2\xi^2}\int\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x+2\pi i\xi)^2}dx,\\&=e^{-2\pi^2\xi^2}.\end{aligned}$$

ただし最後の等式で $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-\frac{1}{2}(x+2\pi i\xi)^2}dx=1$ が成り立つことを用いた[*1].

□

3 中心極限定理

定理 13. （中心極限定理）

$X=(X_1,\cdots,X_n)$ の各 X_i は正則確率測度 λ に独立に従う確率変数であるとし $\mathbb{E}[X_i]=0,\mathbb{V}[X_i]=1$ であるとする．このとき，$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum X_i\xrightarrow{d}\mathrm{N}(0,1)\,(n\to\infty)$ が成り立つ．

Proof. $\lambda_{\sqrt{n}}(E)=\lambda(\sqrt{n}E)$ と表すこととする．ただし $\sqrt{n}E=\{\sqrt{n}x : x\in E\}$．このとき確率変数 $\frac{1}{\sqrt{n}}X_i$ は $\lambda_{\sqrt{n}}$ に従う．独立な確率変数の和の分布はもとの分布の合成積になるから，

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum X_i\sim\lambda_{\sqrt{n}}^{*n},$$

が成り立つ．ただし f^{*n} は f 同士を n 回合成積をとったものとする．ここで $\nu(x)=\lambda_{\sqrt{n}}^{*n}$ と表すことにする．

ν の Fourier 変換を考えると，

$$\hat{\nu}(\xi)=\left\{\hat{\lambda}\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right)\right\}^n,$$

が成り立つ．Fourier 変換の性質から右辺は C^2 級であり Taylor の定理と補題 11 より，

$$\begin{aligned}\hat{\nu}(\xi)&=\left\{1-\frac{2\pi^2\xi^2}{n}+o\left(\frac{\xi^2}{n}\right)\right\}^n,\\&\to e^{-2\pi^2\xi^2}\quad(n\to\infty),\end{aligned}$$

が成り立つ．したがって定理 10 と命題 12 より，

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum X_i\xrightarrow{d}\mathrm{N}(0,1)\quad(n\to\infty),$$

を得る．

□

[*1] 平均 $-2\pi i\xi$ の正規分布の全積分を考えているように見えるが，虚数単位 i が含まれるためこの議論は成り立たず Fourier 変換の性質を用いて証明する必要がある (cf.[1]).

参考文献

[1] Folland, Gerald B. Real analysis: modern techniques and their applications. Vol. 40. John Wiley & Sons, 1999.

[2] 伊藤清, 1991,「確率論」岩波書店.

[3] Vershynin, Roman. High-dimensional probability: An introduction with applications in data science. Vol. 47. Cambridge university press, 2018.

[4] Van der Vaart, Aad W. Asymptotic statistics. Vol. 3. Cambridge university press, 2000.

[5] Borell, Christer. "The brunn-minkowski inequality in gauss space." Inventiones mathematicae 30.2 (1975): 207-216.