再生核ヒルベルト空間とベイズ最適化

Amuta (X: @amuta151)

第 4 回すうがく徒のつどい@オンライン

2023/9/16

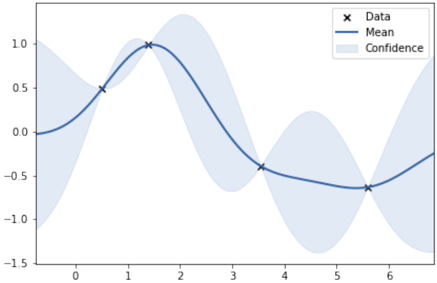
目次

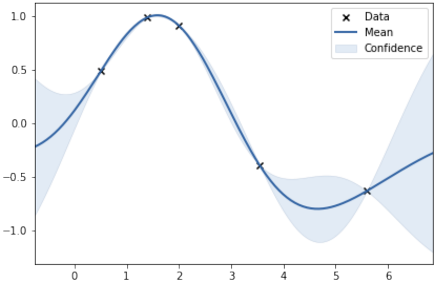
目次

ベイズ最適化

ガウス過程回帰を利用した最適化手法．最適化とはある関数を最小にすること．

関数空間上の確率分布を考えることによって，与えられたデータから未知の関数の概形を予測しながら「どこで最小値を取りそうか」を予測することで効率的に最適化を行うことができる．





ベイズ最適化

「どこで最小値を取りそうか」を獲得関数という関数によって予測する. 獲得関数が大きいほど未知関数が最小値を取りやすいだろうとみなしている.

獲得関数は,

1. **探索**：現在のサンプルより離れたところにより小さい値があるかもしれない.
2. **活用**：現在のサンプルの近くではそれほど値が大きくならないだろう.

のバランスをとりながら新たな最小値を探す.

ガウス過程の性質が非常に重要になる手法である.

ベイズ最適化

ガウス過程の性質はそのガウス過程によって決定する再生核ヒルベルト空間を調べることが重要であることが知られている.

本講演では, **対称コンパクト作用素のスペクトル分解とガウス過程の決める再生核ヒルベルト空間**について詳しく見ていきたい.

目次

多次元正規分布

定義（正規分布と確率密度関数）

確率変数 X について平均 $\mu \in \mathbb{R}$ および分散 $\sigma^2 \in \mathbb{R}$ なる次の確率密度関数を持つとき X は正規分布に従うという：

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right). \tag{1}$$

X が平均 μ, 分散 σ^2 の正規分布に従うことを $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ と表す.

多次元正規分布

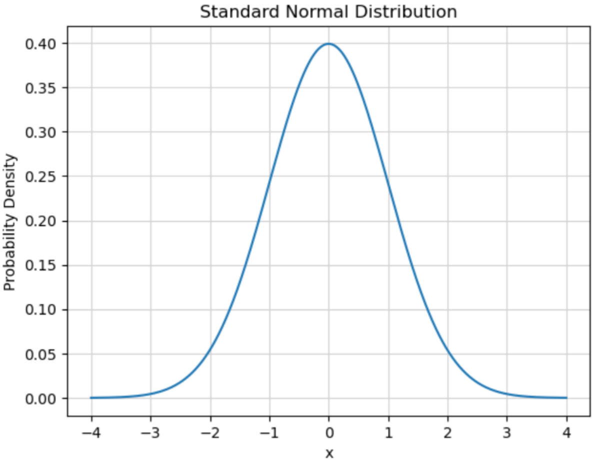


Figure: 標準正規分布の確率密度関数

多次元正規分布

多次元正規分布と確率密度関数

$Y = (X_1, \cdots, X_d)^\top$ とし各 X_i は標準正規分布に従うとする．このとき d 次ベクトル a, d 次正方行列 B について定まる確率変数 $X = a + BY$ は d 次元正規分布に従うという．

特に $\mu = a$, $\Sigma = BB^\top$ とし Σ が正則であるとき，X の確率密度関数は，

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d |\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^\top \Sigma^{-1}(x-\mu)\right) \tag{2}$$

と表せる．

（1次元の）確率変数 $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ も確率変数 $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ を用いて $X = \mu + \sigma Y$ と表せる．

多次元正規分布

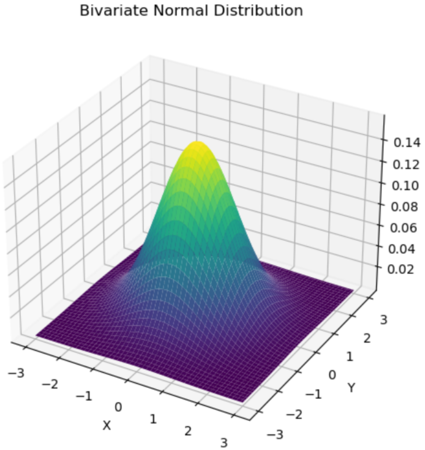


Figure: 二次元正規分布の確率密度関数

多次元正規分布

分散共分散行列 Σ を変えて様子を見てみる.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0.7 \\ 0.7 & 2 \end{pmatrix}.$$

多次元正規分布

多次元正規分布の形状は分散共分散行列 Σ の固有値・固有ベクトルによって決定される.

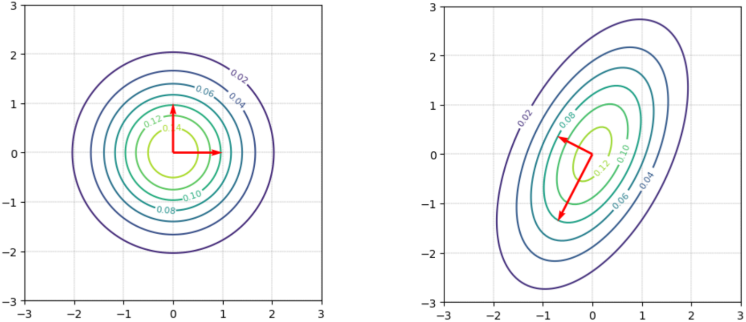


Figure: 等高線で見た場合（固有ベクトルあり）

多次元正規分布

命題（実対称行列の固有ベクトル）

実対称行列の相異なる固有値の固有ベクトルは直交する.

証明の鍵：

$$\langle \lambda_1 x_1, x_2 \rangle = \langle H x_1, x_2 \rangle = \langle x_1, H x_2 \rangle = \langle x_1, \lambda_2 x_2 \rangle.$$

多次元正規分布

分散共分散行列は $\Sigma = B^\top B$ という形から非負定値対称行列になる.

定理（実対称変換のスペクトル分解）

Σ の固有ベクトルの族 $\{\varphi_i\}$ で $\mathbb{R}^d$ の正規直交基底となるものが存在する.

多次元正規分布

重要

正規分布の形状は分散共分散行列 Σ で決まる.

多次元正規分布

特に Σ の固有値が全て正のとき確率密度関数,

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d|\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^\top \Sigma^{-1}(x-\mu)\right),$$

の形を見ると $(x-\mu)^\top \Sigma^{-1}(x-\mu)$ が重要な量であることがわかる.
単純化するために $\mu = 0$ とし, Σ^{-1} を対角化する直交行列を P とすると,

$$\begin{aligned} x^\top \Sigma^{-1} x &= (Px)^\top \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \frac{1}{\lambda_d} \end{pmatrix} (Px), \\ &= (\sqrt{T^{-1}}Px)^\top (\sqrt{T^{-1}}Px), \end{aligned}$$

と表せる. ただし $\sqrt{T^{-1}}$ は上の対角行列の各成分でルートを取った行列.

多次元正規分布

つまり $x \in \mathbb{R}^d$ での確率密度関数を知るためには,

$$\sqrt{T^{-1}}Px$$

が重要な量であることがわかる.
直交行列とフーリエ級数展開の類似性を考えると……

目次

ガウス過程

定義（ガウス過程）

T を集合とし $W = (W_t : t \in T)$ を T に添え字付けられた確率変数族であるとする．任意の $k \in \mathbb{N}$ と任意の $t_1, \cdots, t_k \in T$ について，$(W_{t_1}, \cdots, W_{t_k})^\top$ が k 次元正規分布に従うとき W はガウス過程であるという．

ガウス過程の定義より平均関数および共分散関数，

$$\mu(t) = \mathbb{E}[W_t], \tag{3}$$

$$k(s,t) = \mathrm{cov}[W_s, W_t], \tag{4}$$

が定まる．

$W - \mu$ を考えれば平均関数は 0 になるから，以降ガウス過程を考えるときは常に平均関数は 0 であるものとする．

ガウス過程

ガウス過程 W を決めれば, $k(s,t) = \mathrm{cov}[W_s, W_t]$ が決まる.

逆に共分散関数 $k(s,t)$ を決めれば $\{t_i\}_{i=1,\cdots,N}$ について,

$$(\Sigma)_{ij} = k(t_i, t_j),$$

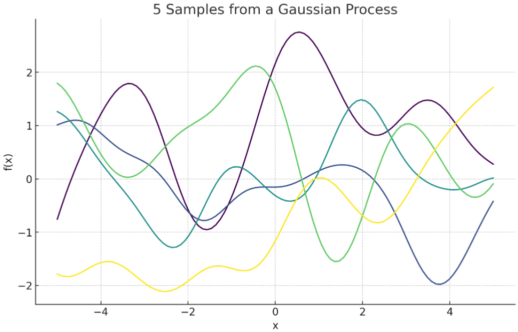
として,

$$W = (W_{t_1}, \cdots, W_{t_N}) \sim \mathcal{N}(0, \Sigma),$$

でガウス過程 W が決まる.

ガウス過程

ガウス過程が関数を生成する様子.



上の図は区間 $[-5,5]$ を百等分し, $k(s,t)=\exp(-\frac{1}{2}||s-t||^2)$ として各点 $t_i (i\in\{0,1,\cdots,99\})$ で W_{t_i} を計算している.

ガウス過程

重要

ガウス過程の性質は共分散関数 $k(s,t)$ で決まる.

ベイズ最適化

- ガウス過程によって定まる関数空間上の確率分布は, 対応するカーネル関数 k に関する再生核ヒルベルト空間によって決まることが知られている（Borell の不等式 [1]）.
- ただし再生核ヒルベルト空間は再生性やカーネル関数の線形結合など有限次元の線形空間では用いられなかったやや天下り式な方法で定義されることが多い.
- そこで, 本発表では対称コンパクト作用素を通して多次元正規分布からの類推でガウス過程を観察することによって再生核ヒルベルト空間を理解することを試みる.

ベイズ最適化

- ガウス過程によって定まる関数空間上の確率分布は, 対応するカーネル関数 k に関する再生核ヒルベルト空間によって決まることが知られている（Borell の不等式 [1]）.
- ただし再生核ヒルベルト空間は再生性やカーネル関数の線形結合など有限次元の線形空間では用いられなかったやや天下り式な方法で定義されることが多い.
- そこで, 本発表では対称コンパクト作用素を通して多次元正規分布からの類推でガウス過程を観察することによって再生核ヒルベルト空間を理解することを試みる.

ベイズ最適化

- ガウス過程によって定まる関数空間上の確率分布は, 対応するカーネル関数 k に関する再生核ヒルベルト空間によって決まることが知られている（Borell の不等式 [1]）.
- ただし再生核ヒルベルト空間は再生性やカーネル関数の線形結合など有限次元の線形空間では用いられなかったやや天下り式な方法で定義されることが多い.
- そこで, 本発表では対称コンパクト作用素を通して多次元正規分布からの類推でガウス過程を観察することによって再生核ヒルベルト空間を理解することを試みる.

目次

バナッハ空間とヒルベルト空間

係数体 $\mathbb{K}$ は $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ のいずれかであるとする.

定義（ノルム）

$\mathbb{K}$ 上の線形空間 X において, 写像 $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ が定義されていて次の条件を満たすとする.

(1) **正値性**：
任意の $u \in X$ について $\|u\| \geq 0$ かつ $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$ が成り立つ.

(2) **スカラー倍の同次性**：
任意の $\alpha \in \mathbb{K}$ と $u \in X$ について, $\|\alpha u\| = |\alpha|\|u\|$ が成り立つ.

(3) **三角不等式**：
任意の $u, v \in X$ について, $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ が成り立つ.

ノルムが定まった線形空間をノルム空間という.

バナッハ空間とヒルベルト空間

ノルムは距離を定める．すなわち，$d(u, v) := \|u - v\|$ $(u, v \in X)$ とすると d は距離関数の公理を満たす．

定義（バナッハ空間）

ノルムが定める距離に関して完備なノルム空間をバナッハ空間という．

バナッハ空間とヒルベルト空間

定義（内積）

$\mathbb{K}$ 上の線形空間 X において，写像 $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ が定義されていて次の条件を満たすとする．

(1) **正値性**：
任意の $u \in X$ について $\langle u, u \rangle \geq 0$ かつ $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$ が成り立つ．
(2) **共役対称性**：
任意の $u, v \in X$ について $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ が成り立つ．
(3) **準双線形性**：
任意の $u_1, u_2, v_1, v_2 \in X$ および $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ について，

$$\langle \alpha u_1 + \beta u_2, v \rangle = \alpha \langle u_1, v \rangle + \beta \langle u_2, v \rangle,$$
$$\langle u, \alpha v_1 + \beta v_2 \rangle = \bar{\alpha} \langle u, v_1 \rangle + \bar{\beta} \langle u, v_2 \rangle,$$

が成り立つ．

バナッハ空間とヒルベルト空間

内積はノルムを定める．すなわち，$\|u\| := \langle u, u \rangle \, (u \in X)$ とすると $\| \cdot \|$ はノルムの公理を満たす．

定義（ヒルベルト空間）

内積が定めるノルムに関してバナッハ空間となるようなノルム空間をヒルベルト空間という．

バナッハ空間とヒルベルト空間

定義（$L^2(X)$）

X を測度空間とし $L(X)$ を X 上の可測関数の集合とする.

$$L^2(X) := \left\{ f \in L(X) : \int_X |f(x)|^2 dx \right\},$$

とすると $L^2(X)$ は,

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \int f(x) g(x) dx,$$

を内積としてヒルベルト空間となる. $\langle f, g \rangle_{L^2}$ は単に $\langle f, g \rangle$ とも表す.

バナッハ空間とヒルベルト空間

定義（$\ell^2(\mathbb{N})$）

$\mathbb{N}$ 上の実数列の集合,

$$\ell^2(\mathbb{N}) := \left\{ a : a = \{a_i\}, \sum_i |a_i|^2 < \infty \right\},$$

とすると $\ell^2(\mathbb{N})$ は,

$$\langle a, b \rangle_{\ell^2} = \sum_i a_i b_i,$$

を内積としてヒルベルト空間となる. $\ell^2(\mathbb{N})$ を単に ℓ^2 とも表す.

- ℓ^2 は集合 X に対して可測集合族として $\mathcal{P}(X)$ を, 測度として数え上げ測度 (counting measure) を入れた場合の L^2 空間である.

バナッハ空間とヒルベルト空間

定義（正規直交基底）

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ が可算な部分集合 $\{\varphi_i\}$ が,

1. $\|\varphi_i\| = 1$（正規性）,
2. $i \neq j$ ならば $\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = 0$ （直交性）,

を満たすとき $\{\varphi_i\}$ は**正規直交系**であるという.

さらに, 任意の $f \in \mathcal{H}$ について,

$$f = \sum_i \langle f, \varphi_i \rangle \varphi_i,$$

が成り立つとき $\{\varphi_i\}$ は**正規直交基底**であるという.

バナッハ空間とヒルベルト空間

定義（フーリエ級数展開）

$L^2(X)$ が正規直交基底 $\{\varphi_i\}$ をもつとすると

$$f = \sum_i \langle f, \varphi_i \rangle \varphi_i,$$

と表せるのであった．このとき $\hat{f}_i = \langle f, \varphi_i \rangle$ を φ_i に関する f のフーリエ係数といい上の級数展開をフーリエ級数展開という．

命題（Parseval の等式）

任意の $f \in L^2(X)$ について $\hat{f} = \{\hat{f}_i\} \in \ell^2$ が成り立ち，

$$\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{\ell^2},$$

が成り立つ．

目次

対称コンパクト作用素とスペクトル

定義（作用素）

X, Y をバナッハ空間であるとする．線形写像 $A : X \to Y$ のことを線形作用素という．

単に作用素と言えば線形作用素を指すことにする．

対称コンパクト作用素とスペクトル

定義（有界線形作用素）

X, Y をバナッハ空間であるとする．線形作用素 $A : X \to Y$ について，ある定数 M が存在して任意の $x \in X$ について，

$$\|Ax\| \leq M\|x\|,$$

が成り立つとき，A は有界線形作用素であるという．

- 線形作用素に関しては有界性と連続性は同等である．

対称コンパクト作用素とスペクトル

定義（対称作用素）

任意の $u, v \in H$ について有界線形作用素 $A : H \to H$ が次を満たすとする：

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle.$$

このとき A は対称作用素であるという.

- 有界線形作用素に関しては対称性 $\Rightarrow$ 自己共役性 $(A = A^*)$.
- 一方, 非有界作用素に関しては対称 $\Rightarrow$ 自己共役は一般には成り立たない.

対称コンパクト作用素とスペクトル

定義（コンパクト作用素）

X, Y をバナッハ空間であるとする．作用素 $A : X \to Y$ がコンパクト作用素であるとは X 上の任意の有界点列 $\{x_i\}$ に対して $\{Ax_i\} \subset Y$ が収束部分列を持つことである．

- 有界集合の像が相対コンパクトになる．
- コンパクト作用素は有界作用素となる．
- $AX \subset Y$ が有限次元であれば A はコンパクト．したがって，行列によって定まる線形写像はコンパクト．

対称コンパクト作用素とスペクトル

定理（フレドホルムの定理）

$\mathcal{H}$ をヒルベルト空間とし, $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ をコンパクト作用素であるとする.
このとき任意の $\lambda \in \mathbb{K}$ について,

$$V_\lambda = \{x \in \mathcal{H} \mid Tx = \lambda x\},$$

とする.
(1) $V_\lambda \neq \{0\}$ となるような λ（固有値）は高々可算個であり, 0 以外の点に集積しない.
(2) 任意の $\lambda \neq 0$ について V_λ は有限次元空間である.

対称コンパクト作用素とスペクトル

定理（対称コンパクト作用素のスペクトル分解定理）

T をヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の対称コンパクト作用素とする．このとき, T の固有関数の族 $\{\varphi_i\}$ で $\mathcal{H}$ の正規直交基底となるものが存在する．

- 対称コンパクト作用素の固有値 λ_i は $\lambda_i \geq 0$ を満たす.

目次

作用素と再生核ヒルベルト空間

ガウス過程 W を決めると $k(s,t) = \mathrm{cov}(W_s, W_t) = \mathbb{E}(W_s W_t)$ で分散共分散関数が決まるのであった.

このセクションでは S を $\mathbb{R}^d$ をコンパクト集合とし, S 上のガウス過程 $W = \{W_s\}_{s\in S}$ を考えることにする. このときこの W に関する k はガウス過程の定義により次の性質を満たす.

作用素と再生核ヒルベルト空間

定義（正定値関数）

S を $\mathbb{R}^d$ をコンパクト集合とし, 関数 $k : S \times S \to \mathbb{R}$ を考える．任意の $c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{R}$ および, 任意の $x_1, \cdots, x_n \in S$ について,

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_i c_j k(x_i, x_j) \geq 0,$$

が成り立つとき k は S 上の正定値関数であるという.

- $(K)_{ij} = k(x_i, x_j)$ で決まる行列が半正定値であるということ.

作用素と再生核ヒルベルト空間

命題（正定値関数の定める対称コンパクト作用素）

$L^2(S)$ を S 上の二乗可積分関数全体, k を S 上の連続な正定値関数とする. k は,

$$Kf := \int f(x)k(x, \cdot)dx,$$

によって $L^2(S)$ 上の作用素を定め, これは対称コンパクト作用素となる.

- 対称性は Fubini の定理による.

作用素と再生核ヒルベルト空間

命題 (固有関数の連続性)

K の固有値の族を $\{\lambda_i\}$ とし，固有関数の族を $\{\varphi_i\}$ とする．このとき，$\{\varphi_i\}$ は $L^2(S)$ の正規直交基底となる．特に φ_i は連続関数である．

Proof.

対称コンパクト作用素のスペクトル分解定理による．固有方程式 $K\varphi_i = \lambda_i \varphi_i$ および左辺が連続関数であることから従う [a]． □

[a] L^p の元として見るときは関数の同値類の代表元として連続関数を取ることができることを意味する．

作用素と再生核ヒルベルト空間

定理（Mercer の定理）

$$k(x,y) = \sum_i \lambda_i \varphi_i(x)\varphi_i(y), \tag{5}$$

が成り立ち，右辺の級数は絶対一様収束する．

作用素と再生核ヒルベルト空間

Proof.

固有方程式 $K\varphi_i = \int \varphi_i(x)k(x,\cdot)dx = \lambda_i\varphi_i$ は $\lambda_i\varphi_i$ が φ_i に関する $k(x,\cdot)$ のフーリエ係数であること示す．すなわち，式 (5) が平均収束の意味で成り立つ．

さらに，$S_{nm}(x,y) = \sum_{i=n}^{m} \lambda_i\varphi_i(x)\varphi_i(y)$ としたときシュワルツの不等式から，

$$\sum_{i=n}^{m} \lambda_i\varphi_i(x)\varphi_i(y) \leq S_{nm}(x,x)S_{nm}(y,y),$$

が成り立つ．固有関数が連続であることとコーシーの一様収束条件より $\sum_i \lambda_i\varphi_i(x)\varphi_i(y)$ は一様収束し，絶対収束することは k の S における有界性からわかる． $\square$

作用素と再生核ヒルベルト空間

ここで有限次元正規分布の確率密度関数の話を思い出そう．確率密度関数の形を踏まえて $\sqrt{T^{-1}}Px$ が重要な量になるのであった．

分散共分散行列 Σ の固有ベクトルの族を $\{\varphi_i\}$ とすると，

$$
\begin{aligned}
x^\top \Sigma^{-1} x &= (Px)^\top \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \frac{1}{\lambda_d} \end{pmatrix} (Px), \\
&= (\sqrt{T^{-1}}Px)^\top (\sqrt{T^{-1}}Px),
\end{aligned}
$$

と表せる．

作用素と再生核ヒルベルト空間

したがって,

$$\sqrt{T^{-1}}Px = \sum_i \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\langle x, \varphi_i\rangle\varphi_i,$$

と表すことができる.

作用素と再生核ヒルベルト空間

ここでヒルベルト空間上の作用素 K に対して $\sqrt{T^{-1}}P$ に対応する関数を定めよう．

定義（$K^{-\frac{1}{2}}$）

K の固有値が全て正であるとする．このとき，

$$K^{-\frac{1}{2}}f := \sum_i \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\hat{f}_i\varphi_i,$$

と定義する．

- $K^{-\frac{1}{2}}f$ は可測関数であるが $L^2(S)$ の元になるとは限らない．

作用素と再生核ヒルベルト空間

定義（再生核ヒルベルト空間）

$$\mathcal{H} = \left\{ f \in L^2(S) : K^{-\frac{1}{2}} f \in L^2(S) \right\},$$

において内積を,

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}} := \left\langle K^{-\frac{1}{2}} f, K^{-\frac{1}{2}} g \right\rangle = \sum_i \frac{\hat{f}_i \hat{g}_i}{\lambda_i},$$

と定めると $\mathcal{H}$ はこの内積についてヒルベルト空間となる．$\mathcal{H}$ を正定値関数 k に関する再生核ヒルベルト空間という．

- $K^{-\frac{1}{2}} f \in L^2(S)$ という条件は $\sqrt{T^{-1}} P x$ に対応する量が意味を持つための条件になっている．

作用素と再生核ヒルベルト空間

命題（再生性）

正定値関数 k とヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ について次が成り立つ.
(1) 任意の $x \in S$ について $k(x, \cdot) \in \mathcal{H}$.
(2) 任意の $f \in \mathcal{H}$ と任意の $y \in S$ について,

$$f(y) = \langle f, k(\cdot, y) \rangle_{\mathcal{H}},$$

が成り立つ.

作用素と再生核ヒルベルト空間

Proof.

(1) Mercer の定理より $f = k(x, \cdot)$ とすると $\hat{f}_i/\sqrt{\lambda_i} = \lambda_i\varphi/\sqrt{\lambda_i}$ となるから, $\sum_i |\lambda_i\varphi_i/\sqrt{\lambda_i}|^2 = \sum_i \lambda_i\varphi_i^2 = k(x,x) < \infty$ より $f \in \mathcal{H}$.
(2) Mercer の定理より,

$$\begin{aligned}\langle f, k(\cdot, y)\rangle_{\mathcal{H}} &= \left\langle \sum_i \hat{f}_i\varphi_i, \sum_j \lambda_j\varphi_j\varphi_j(y) \right\rangle_{\mathcal{H}}, \\ &= \sum_i \hat{f}_i\varphi_i(y), \\ &= f(y),\end{aligned}$$

が成り立つ. $K^{-\frac{1}{2}}f \in L^2(S)$ とコーシーの収束条件から級数は絶対一様収束する. □

ガウス過程と再生核ヒルベルト空間の関係

ガウス過程 W を決めるとそれに対応するただ一つの再生核ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ が決まることが知られている（Moore-Aronszajn の定理）.

そして, $\mathcal{H}$ は W の関数空間上での確率分布を決める上で非常に重要な役割を果たすことが知られている. 詳しくは [1] などに記載されている.

参考文献 I

[1] Ghosal, Subhashis, and Aad Van der Vaart. Fundamentals of nonparametric Bayesian inference. Vol. 44. Cambridge University Press, 2017.

[2] Rasmussen, Carl Edward, and Christopher KI Williams. Gaussian processes for machine learning. Vol. 1. Cambridge, MA: MIT press, 2006.

[3] 藤田宏, 黒田成俊, 伊藤清三. 「関数解析」. 岩波書店, 1991.

[4] Aronszajn, Nachman. "Theory of reproducing kernels." Transactions of the American mathematical society 68.3 (1950): 337-404.

[5] Folland, Gerald B. Real analysis modern techniques and their applications. Vol. 40. John Wiley and Sons, 1999.

[6] Folland, Gerald B. Introduction to partial differential equations. Vol. 102. Princeton university press, 1995.

[7] 竹村彰通. 「現代数理統計学」. 創文社現代経済学選書, 1991.

参考文献 II

[8] 伊藤清.「確率論」. 岩波書店, 1991.
[9] 齋藤正彦.「線形代数」. 東京大学出版会, 1966.