空集合をつくる -metatheory から考える集合論入門-

Amuta(@Amuta151)

2022-12-19

1 Introduction

本稿では ZFC で空集合を定義することを通して, 数理論理学や集合論に入門したての頃筆者自身が躓いたことを簡単にまとめる. テーマは主に二つあり 1. metatheory と object について, 2. 公理的集合論での集合の定義についてである. 対象読者として命題論理や一階述語論理の健全性や完全性について学んだことがある方々を想定する.

本稿は Alwe さん (@Alwe_Logic) 主催の数学基礎論アドベントカレンダー 2022 へ寄稿させていただくものである.

2 metatheory と object

数理論理学や集合論の議論を理解するためには metatheory と object の区別が重要である. しかし, 日本において標準的な入門書では metatheory とは何かという点については大分して二つの態度があるようだ. 著者が入門したての頃, 書籍や議論する相手によって metatheory が何を意味するのかが異なったために混乱した経験がある.

二つの態度とは,

1. metathory とは ZFC として形式化される集合論であると考える態度,
2. metathory とは有限的な対象だけを扱うことが許される場であると考える態度,

である (後述するが竹内外史は 2 の立場を PRA として形式化される算術であると主張していた).

結局のところどちらの態度を取ろうとも得られる諸結果は変わらないが, 結果が変わらないということを了解しておくことが重要である. そこで本章ではいくつかの書籍を参考にしながら metatheory について簡単に確認しておきたい.

ところで, 第 2 章の内容は数学哲学の議論であることを断っておく.

あくまで主観的な感想であるが筆者が学部生の頃, 数理論理学は数学の他分野と比較して異質な分野に見えた. 実際に勉強を進めた今, 本章のような数学哲学的な議論を多少必要とする部分こそ数理論理学が他分野の数学徒から見て異質に見えてしまう一つの原因であると感じる (筆者はもともと解析学を学んでいた).

しかし, 一度通り過ぎてしまえば数学として厳密に数理論理学を研究できることが納得できるし, 現代数学そのものへの理解も深まったように思う. 筆者は入門時ここで混乱を経験し, 同様の混乱を経験している人を知っているためこの章の内容を書き留めておくことが無益ではないと判断した.

2.1 metatheory に関する二つの態度

数理論理学が数学の一分野として展開される以上, 「metatheory とは ZFC として形式化される集合論であると考える態度」を取れば基本的に問題は起こらない. この態度はすなわち, 「metatheory における集合とは何か」という疑問に対して,

- ZFC が表現する諸性質は矛盾しないであろうと経験的事実として暫定的に認め, 集合はすでに定まっていると考える.

というものになるだろう. 経験的事実を暫定的に認めるという点さえ許してしまえば見通しのよい考え方である.

この立場をとる書籍としては新井敏康先生の教科書 [1] があげられる. この書籍では一階述語論理の言語 $\mathcal{L}$ は最初から「どんなに大きな集合であっても構わない」ものとして定義される.

仮に metatheory が有限的であると考えているならば, 少なくとも一度は言語 $\mathcal{L}$ は高々可算な記号の集まりとして定められなければならない. すなわち [1] では metatheory の時点で集合論を仮定していると言える.

それに対し「有限的な対象だけを扱うことが許される場であると考える態度」(以下, 有限的態度) では, metatheory において必ずしも ZFC の無矛盾性を認める必要はない.

Kleene は以下のように述べている.

> The methods used in the metatheory shall be restricted to methods called *finitary* by the formalists, which employ only intuitively conceivable objects and performable processes. ([2], p.63)

すなわち, metatheory においては集合論を仮定せず, intuitively conceivable objects(直感的に考えうる対象) のみを扱うという態度である.

また, 竹内外史は [3] の序論において以下のように述べている.

> それならば, 現代数学は数学基礎論における一つの形式的な公理体系の内部の議論に過ぎないのであろうか？
>
> これを肯定しがたいのは筆者のみではあるまい. 公理的集合論は内容的に見ると, あまり意味のはっきりしない形式的体系に過ぎない. 素朴集合論における集合概念, いいかえれば現代数学において用いられている集合のようにわれわれの論理的直観を充たしてくれるものではない. 例えば, 自然数, 実数, およびその他の現代数学における生々とした諸分野が単にこのような形式的体系の一部分として考えることはいささかの不満が感じられはしないか. それに公理的集合論が矛盾を含まないということは, いままでの短い年月の間の経験以外に何の保証もないのである.
>
> （中略）
>
> 形式主義においては最も純粋な理想的立場として次に述べる有限の立場をとるのである. ([3], pp.2-3)

すなわち, metatheory において集合論を仮定することを避け, 有限の立場を取ることが証明論を展開する上で理想的であると述べている. ここで竹内外史が言う「有限の立場」については後ほど考察する.

metatheory で無限をどのように捉えるべきかという点については渕野昌先生の [6] における下記の説明がわかりやすい.

> 超数学では、集合、いわんや無限集合はフィクションでしかなく、正当に扱える対象は具体的なもの

> に限られるので、そこでは、ある性質を持つ対象が無限にある、ということは、その性質を持つ対象が(有限個) 具体的に与えられたときに、その中に含まれない別の対象でこの性質を持つものを作るアルゴリズムが存在すること、としてしか捉えようがない。([6], p.4)

有限的態度でも metatheory で集合という言葉がしばしば使用される．しかし，「超数学では、集合、いわんや無限集合はフィクションでしかな」いと考えると, metatheory における集合という言葉は厳密には定義されてはおらず, 対象の有限の集まりやアルゴリズムによってつくられ得る全体を集合と呼称しているに過ぎない．

そして, それらの対象は ZFC 集合論でいずれかの集合と同一視できる (ω を用いてゲーデル数化してもよいし $R(\omega)$ に埋め込んでもよい).

2.2　有限的態度では「通常の数学」も可能である

前節の比較から考えると有限的態度は極めて制限された立場であるように感じられる．しかし, 実際は「metatheory とは ZFC として形式化される集合論であると考える態度」と同等の数学を展開することができる．

その方法は Kunen が [4] にて簡単に述べている．ここでは藤田博司先生による訳書 [5] より引用する．

> メタ理論はまったく有限的なので, ひとまず異論の余地なしと考えましょう．メタ理論においてフォーマルな証明の概念を含むフォーマルな論理を展開します．そのさい, いくらかの（有限的な）定理を証明して, フォーマルな証明という概念が意味をなすようにしておかねばなりません．こうした定理のうちには, わたくしたちの証明の方法の健全性（補題 II.10.5）の有限的な言い直し, すなわち $\Sigma \vdash \varphi$ のときには Σ のすべての**有限**モデル（太字原文ママ）において φ が真であるということが, 含まれます．
>
> それから, ZFC の展開へと進み, ZFC の**中で**（太字原文ママ）, モデル理論をも含む通常の数学のすべてを展開します．そのほとんどは, 有限的ではありません．モデル理論の展開に際して, わたくしたちはフォーマルな論理をふたたび展開しなおさなければなりません．もちろん用いられる推論は同じものなのですが, 今度は言語 $\mathcal{L}$ も対応する構造も任意の濃度をもつことができます．そして, 推論は ZFC の中で定式化されます．([5], p.279)

このセクションの題は「フォーマルな論理の展開は二度なされねばならない」である．この題はここで主張していることを端的に表現している．

すなわち, 有限的態度を meta-metatheory にて守ってさえいれば, metatheory では集合論が使用できると思って議論を展開できる．このように考えることで有限的態度に立ちながら数理論理学を含む通常の数学を（有限的対象の記号操作だと思って）展開することができる．

2.3　有限的態度にもバリエーションがある

本稿では「有限的な対象だけを扱うことが許される場であると考える態度」をまとめて有限的態度と呼ぶことにした．しかし, 一口に有限的態度と言っても研究者によって念頭に置かれている議論にやや違いがあるようだ．

ここでは, Kunen の finitistic metatheory と竹内外史の (Hilbert's) finitist standpoint を比較してみよう．

前節で述べたように Kunen の考えでは metatheory では自然数か $R(\omega)$ の各元に相当する集合の存在を認めればすべての議論を展開することができる．

一方, 竹内外史は [7] で以下のように述べている．

> it seems quite reasonable to characterize Hirbert's finitist standpoint as that which can be formalized in *primitive recursive arithmetic*. ([7], p.90)

つまり, metatheory は PRA として形式化される算術である考える. 本書ではこのあと再帰的定義による順序数の定義に移り ε_0 までの順序数を定める. すなわち, metatheory において ε_0 までの順序数を考えている.

当然, Kunen の finitistic metatheory でも再帰的定義は認めている. しかし, Kunen の考えでは必要に応じて形式的に ZFC 集合論を展開してその中で仕事をするため自然数や $R(\omega)$ の各元に相当する集合さえあればよく, metatheory では ω 以上の順序数を考えない.

それでは, 竹内外史は集合論をどのように取り扱うべきだと考えていたのだろうか. [3] の第 5 章では以下のように述べられている.

> 現在の数学における集合概念は集合論までいかず, 固定した domain の集合だけを考える限りにおいては, 数学者には明確で殆んど疑いのないものである. その立場の一つだけの欠点は有限の立場でないということだけである. この意味で現在の集合概念の基礎を論ずるときには, 有限の立場か, または有限の立場にできるだけ近いものでなければ意味がないといってよいだろう. ([3], pp.167-168)

すなわち, 通常の数学を展開するときには集合論の全体を使用する必要がないから有限の立場に立つ必要もないだろうということだ. しかし, 集合論自体を対象に論ずるときにはあくまで有限の立場に立つことを主張している.

2.4 どちらの態度を取るべきか

どちらの態度をとるべきかに関しては, 筆者は「より合理的であると感じる態度を各個人が自ら考え選ぶ」しかないと理解している.

数学を学ぶ上では「誰が言っているか」で意見を決めるべきではなく, 様々な議論を参考にしながら自らの内側に独自に数学を再構成していくことこそが重要であると筆者は考える (学生時代数学者の先生方から学んだ最大のことはこれであったと思う).

また, 先に述べたようにどちらの態度を取ったとしても数学としての数理論理学の諸結果は変わらない.

以上のことから, 本稿では二つの立場について「こちらこそが正しい」という主張はあえて避け, それぞれの立場を様々な文献を参考に比較するに留める.

以降の章は, それぞれの読者にとって支持し得る立場に立って読んでいただきたい.

3 定義による拡大

前置きがかなり長くなったが, ここからは数学的な議論に移ろう.

集合論では様々な集合を定義し言語を拡張していく. そして, 累積的階層の議論を踏まえるとすべての集合のはじまりとも言える空集合を最初に定義する必要がある.

そのために, まずは言語の拡張を定義しよう. 以降の議論は [8] を参考にした.

定義 1. (定義による拡大)

$\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ を言語の集合とし $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}'$ であるとする. また, Γ を $\mathcal{L}$-閉論理式の集合とする.

$p \in \mathcal{L}' \setminus \mathcal{L}$ が n-項述語記号のとき, $\mathcal{L}$ 上の p の定義とは, θ を $\mathcal{L}$-論理式として,

$$\forall x_1, \cdots, x_n[p(x_1, \cdots, x_n) \leftrightarrow \theta(x_1, \cdots, x_n)],$$

なる $\mathcal{L}'$-閉論理式のことである.

$f \in \mathcal{L}' \setminus \mathcal{L}$ が n-項関数記号のとき, $\mathcal{L}$ 上の f の定義とは, θ を $\mathcal{L}$-論理式として,

$$\forall x_1, \cdots, x_n[\theta(x_1, \cdots, x_n, f(x_1, \cdots, x_n))],$$

なる $\mathcal{L}'$-閉論理式のことである. ただし, θ は,

$$\Gamma \vdash \forall x_1, \cdots, x_n \exists! y \theta(x_1, \cdots, x_n, y),$$

を満たすとする.

$\Delta = \{\delta_s | s \in \mathcal{L}' \setminus \mathcal{L}\}$ とすると Δ は言語を $\mathcal{L}'$ に取り換えたことにより増加した記号の定義の全体の集合である. このとき, $\mathcal{L}'$-閉論理式の集合 $\Gamma' = \Gamma \cup \Delta$ を Γ の定義による拡大という.

$\mathcal{L}'$-閉論理式 φ' について $\Gamma' \vdash \varphi'$ であるとき, φ' が含む Δ の記号を θ に直した $\mathcal{L}$-閉論理式を φ とすると $\Gamma \vdash \varphi$ となる. この事実は一階述語論理の公理と論理式の再帰的定義より証明できる.

ZFC は言語 $\mathcal{L} = \{\in\}$ のみからなる公理系である. しかし, 定義による拡大によって $\subset, \cap, \cup, <, 1, 2, 3 \cdots,$ ω といった様々な記号を定義し使用することができようになる. これらの記号には定義 1 によって一つの論理式が対応している.

本稿ではその実例として, $\emptyset$ を定義するところまでを実際にやってみよう.

4　空集合を定義する

空集合を定義するためには ZFC のすべての公理が必要になるわけではない. ここでは必要な公理だけを抜き出して紹介することにしよう.

1. (外延性の公理) $\forall x, y[\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y]$.
2. (内包性公理図式) y を自由変数として含まない論理式 φ について,

$$\exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow x \in v \wedge \varphi(x)).$$

内包性公理図式に関しては「y を自由変数に含まないすべての論理式」について言及している. この「すべての」は形式化されておらず, metatheory において適切な論理式が与えられるごとに内包性公理の形の論理式を公理として認めるという意味である. すなわち, 内包性公理図式は可算無限個の公理の集合とも言えるし, 公理を生成するアルゴリズムであるとも言える.

さて, 空集合とはどのような性質を持つ集合であろうか. もちろん, 要素を持たない集合である. このことを論理式の形で表すと次のようになる.

定義 2. $\mathrm{emp}(y) \equiv \forall z(z \notin y)$.

この論理式が表す性質を持つ集合を公理から作り出すことができれば, その集合を新しい定数記号 (0-項関数記号)$\emptyset$ として定義すればよい.

では, どのようにして空集合をつくり出すか. 空集合をつくるためには内包性公理図式を使いたい.

内包性公理図式は集合 v の部分集合を論理式 φ を用いて指定することで, 指定された部分集合が集合として存在することを保証する公理である. よく知った通り空集合は任意の集合の部分集合であるから φ をうまく選べば v がどんな集合であっても空集合を取り出せるはずだ.

そのためには v にあたる集合が存在する必要がある. しかし, ここまでで何らかの集合が存在することを我々は示していない. 果たして何らかの集合 v を我々は取ることができるだろうか.

答えはもちろん取ることができる.

命題 1. $\vdash \exists v(v=v)$.

証明. 一階述語論理の証明系を固定していないので, 証明系によらない証明を与えよう.

$\Gamma=\emptyset$ としよう. このときモデルの定義より Γ の任意のモデルは空でない. すなわち, $\Gamma \vDash \exists v(v=v)$. よって, 完全性定理より $\Gamma \vdash \exists v(v=v)$. Γ は空であるから $\vdash \exists v(v=v)$. □

要するにモデルは定義より空でないということを言い直したということである. この証明は metatheory における証明である.

これより, $\exists v(v=v)$ は定理として使用してよいことがわかった. すなわち, 集合論でも何らかの集合が存在するとしてよい. よって, この集合を v とすれば内包性公理図式を使用することができる.

内包性公理図式において,

$$\varphi(x) \equiv (x \neq x),$$

としよう. すると,

$$\exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow x \in v \wedge (x \neq x)),$$

より $y=\{x \in v | x \neq x\}$ なる集合が存在するという公理になる.

この y は $\mathrm{emp}(y)$ を満たす. 一階述語論理の述語記号に $=$ を含める際には, 公理に等号公理 (t を閉項としたとき $t=t$) を含めるか, 等号公理を定理として導出できるような公理を含める. よって, $\vdash x=x$ としてよい. もし $x \in y$ ならば $x \neq x$ となって矛盾.

さらに, 外延性公理より $\mathrm{emp}(y)$ を満たす集合は unique である.

したがって, 外延性公理と内包性公理図式を含む公理系を Γ とすると,

$$\Gamma \vdash \exists ! y \mathrm{emp}(y),$$

を得る.

これより, 定義 1 で $\mathcal{L}'=\{\in, \emptyset\}$, $\Delta=\{\mathrm{emp}(\emptyset)\}$ とすればよい.

以上で内包性公理図式によって空集合を作り出し, 空集合を表す定数記号を定義することができた. 当然, ZFC を Γ としてよいから, ZFC においても同様に空集合を定義できる.

参考文献

[1] 新井敏康, 「数学基礎論　増補版」(東京大学出版会), 2021.

[2] Stephan Cole Kleene, "INTRODUCTION TO METAMATHEMATICS"(ISHI PRESS INTERNATIONAL), 1950.

[3] 竹内外史, 八杉満利子, 「復刊 証明論入門」(共立出版), 2010.

[4] Kenneth Kunen, "The Foundations of Mathematics"(College Publications), 2009.

[5] 著・Kenneth Kunen, 訳・藤田博司, 「キューネン数学基礎論講義」(日本評論社), 2016.

[6] 渕野昌, 「巨大基数と巨大な巨大基数、超数学での無限と集合論的無限、それらに対する有限の諸相 (現代思想 2019 年 12 月号 拡張版)」, [https://fuchino.ddo.jp/misc/large-cardinals-2019-x.pdf], 2022.

[7] Gaisi Takeuchi, "PROOF THEORY SECOND EDITION"(DOVER), 1987.

[8] Kenneth Kunen, "Set Theory"(College Publications), 2013.