一階述語論理の健全性と完全性

Amuta

2022 年 2 月 12 日

1 はじめに

本PDFの特色は，Gödelの完全性定理までの最短距離を目指すことにある．

一階述語論理の健全性と完全性は数理論理学の基本的な結果である．特に非自明な完全性は1929年にGödelによって証明された．

完全性とは設定した証明体系（本PDFではHilbertの公理系を採用する）が十分な表現力を持つかを述べる定理である．すなわち，「正しい論理式は全て証明可能である」ということを主張する．このことは一見当たり前であるように思えるが，「証明可能である」ということを数学的に定義したときに，その意味で必ず証明できるということは自明ではない．完全性によって一階述語論理が自然に要請される表現力を持つことがわかるという点で基本的である．

ところで, 日本語で書かれた数理論理学の優れた教科書は多数あれど完全性までの道のりに特化した書籍は少ない. 当然, 様々な応用を意識してその準備をしながら進むため, 完全性の証明には必要のない知識も盛り込みながら証明していくからである.

しかし, なるべく手短に完全性を理解するということも数理論理学の学習において有益である.

そこで, 本PDFは可能な限り見通しよく，最低限の準備でGödelの完全性定理を証明することを目指した．本PDFの完全性定理の証明は主に[1], [2], [3]を参考にしたがどの本とも細部が異なり, 筆者の主観で最も見通しがよいと思う証明に再構成した.

１つの結果を様々なやり方で証明することは理解を深める手助けになると思われるので興味のある方はぜひ比較してみていただきたい.

目 次

1 はじめに **2**

2 論理式と構造 **4**
2.1 論理式 4
2.2 構造 6

3 モデルと論理的帰結 **7**
3.1 真理値 7
3.2 モデルと論理的帰結 8

4 形式的証明と健全性 **9**
4.1 形式的証明 9
4.2 演繹定理 11
4.3 対偶法 12
4.4 健全性定理 13

5 モデルの存在定理と完全性 **13**
5.1 極大無矛盾集合 14
5.2 モデルの存在定理 16
5.3 完全性定理 18

2　論理式と構造

2.1　論理式

まず, 論理式を定義しよう．そのために各記号 (=言語) と項を定義する.

定義 1.（言語）

1. 変数記号

   アルファベットおよびアルファベットに添え字として自然数が付されたものを変数記号という．また, 変数記号の集合を $\mathcal{VAR}$ と表す.

   $$\mathcal{VAR} := \{a, b, c, \ldots, a_0, a_1, a_2 \ldots\}. \tag{1}$$

2. 論理記号

   論理記号の集合を $\mathcal{LG}$ で表し, 次で定める.

   $$\mathcal{LG} := \{\bot, \neg, \wedge, \vee, \forall, \exists, =\}. \tag{2}$$

3. 定数記号

   定数を表す記号の集合を $\mathcal{C}$ と表す.

4. 関数記号

   自然数 $n(n > 0)$ に対し n-引数関数を表す記号の集合を $\mathcal{F}_n$ とし, n をその関数記号のアリティという．また, 関数記号全体の集合を $\mathcal{F}$ と表す.

   $$\mathcal{F} := \bigcup \mathcal{F}_n. \tag{3}$$

5. 述語記号

   自然数 $n(n > 0)$ に対し n-引数関係を表す記号の集合を $\mathcal{P}_n$ とし, n をその関係記号のアリティという. また, 関係記号全体の集合を $\mathcal{P}$ と表す.

   $$\mathcal{P} := \bigcup \mathcal{P}_n. \tag{4}$$

   以上の記号すべての集合を**言語**といい, $\mathcal{L}$ と表す.

$$\mathcal{L} := \mathcal{VAR} \cup \mathcal{LG} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{P}. \tag{5}$$

これから定義する項や論理式というものは全てある言語の記号から作られる記号列である．そこで, 論理記号としての $=$ と記号列として等しいことを表すメタ記号を区別する必要がある.

定義 2.（記号列としての同値）
言語 $\mathcal{L}$ の記号から作られる記号列を s, t とする．このとき, 記号列として等しいことを $s \equiv t$ と表す.

(や) を記号として言語に含めることもあるが, 実はこれらの記号はなくともよい（逆ポーランド記法によって論理式を木構造で表せる）．よって, ここでは記号として扱わない．ただし, わかりやすさのために補助として使用する.

続いて項を定義する．論理式を文章と考えるならば, 単語に相当する概念が項である.

定義 3.（項）

項を以下で定める.

1. 変数記号は項である.
2. 定数記号は項である.
3. $t_1, t_2, \ldots, t_n$ を項とし, f を n-変数関数 ($f \in \mathcal{F}_n$) とする．このとき, $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ も項である.
4. 以上で項であることがわかるものだけが項である.

ここで各 t_i は項を表すメタ変数であり, 記号ではないことに注意.
さて, 項を定義できると論理式を定義することができる.

定義 4.（原子論理式）
$t_1, t_2, \ldots, t_n$ を項とする．また, し R を n-引数関係 ($R \in \mathcal{P}_n$) とする．このとき,

$$\perp, \tag{6}$$
$$(t_1 = t_2), \tag{7}$$
$$R(t_1, t_2, \ldots, t_n), \tag{8}$$

を**原子論理式**という.

定義 5.（論理式）

論理式を以下で定める.

1. 原子論理式は論理式である.
2. φ, ψ を論理式とする．このとき, $\neg\varphi, (\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \to \psi)$, は論理式である.
3. φ を論理式とし, x を変数記号とする．このとき, $(\forall x \varphi), (\exists x \varphi)$.

4. 以上で論理式であることがわかるものだけが論理式である.

(や) は論理記号の結合順序が変わらない範囲で省略可能とする. また, $\to$ が２つ並ぶ場合は右側の結合を優先する. すなわち, $\varphi \to \psi \to \theta$ は $\varphi \to (\psi \to \theta)$ を表す.

定義 6. **(スコープ)**
論理式が $(\forall x\varphi), (\exists x\varphi)$ のいずれかの形であるとき, 論理式 φ に対応する部分を $\forall x$ または $\exists x$ の**スコープ**という.

論理式 φ に含まれる変数記号 x の個数を $\mathrm{num}_\varphi(x)$ と表そう.

定義 7. **(束縛出現・自由出現)**
論理式 φ に含まれる変数記号 x のうち i 番目 ($1 \leq i \leq \mathrm{num}_\varphi(x)$) のものを x^i と表すことにする. 変数記号 x^i が $\forall x$ または $\exists x$ のスコープ内に含まれているとき変数記号 x^i は**束縛出現する**という. x^i が束縛出現しないとき, **自由出現する**という. また束縛出現する変数記号を**束縛変数**, 自由出現する変数記号を**自由変数**という.

束縛出現・自由出現は変数記号の１つ１つに定義された概念であることに注意. すなわち, 同じ a という変数記号でも $\forall a(a = a) \land (a = x)$ のように複数回現れていれば, $\forall a^1(a^2 = a^3) \land (a^4 = x)$ として区別する. この例では a^2, a^3 は束縛出現, a^4 は自由出現である. a^1 はいずれでもない.

定義 8. **(閉項)**
項 t に変数記号が含まれないとき, t を**閉項**という.

定義 9. **(閉論理式)**
論理式 φ 自由変数を含まないとき, φ は**閉論理式**であるという.

定義 10. **(全称閉包)**
論理式 φ に出現する自由変数を $x_1, \ldots, x_n$ とする. φ の**全称閉包**とは, $\forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi$ の形の閉論理式のことである.

2.2 構造

定義 11. **($\mathcal{L}$-構造)**
言語 $\mathcal{L}$ に対して **$\mathcal{L}$-構造**とは空でない集合 M と $\mathcal{L}$ 上の部分写像[*1] F の組 $\mathcal{M} = \langle M; F \rangle$ のことである. ここで, F は次のような写像である.

1. $c \in \mathcal{C}$ に対して $c^{\mathcal{M}} := F(c)$ は M の元である.

2. $f \in \mathcal{F}_n$ に対して $f^{\mathcal{M}} := F(f)$ は関数 $M^n \to M$ である.

[*1] 部分写像とは, 適切な部分集合上で考えれば写像になっているものである. F の定義域が $\mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{P} \subsetneq \mathcal{L}$ であるから $\mathcal{L}$ 上の部分写像であり写像ではない.

3. $R \in \mathcal{P}_n$ に対して $R^{\mathcal{M}} := F(R)$ は n-項関係である.

$t^{\mathcal{M}}$ のことを記号 t の $\mathcal{M}$ における**解釈**という. また, 集合 M を $|\mathcal{M}|$ と表し**対象領域**という.

定義 12. **(名前・名前による拡張 $\mathcal{L}(\mathcal{M})$)**
言語 $\mathcal{L}$ とその $\mathcal{L}$-構造を $\mathcal{M}$ とする. このとき, M の各元 $m \in M$ を表す定数記号 c_m を新たに定義し $c_m^{\mathcal{M}} = F(c_m) = m$ と定める. c_m を m の**名前**という. $\mathcal{L}$ に $\{c_m : m \in M\}$ を付け加えた言語を $\mathcal{L}$ の**名前による拡張**といい $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ と表す.

定義 13. **($\mathcal{L}$-論理式, $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-論理式)**
言語 $\mathcal{L}$ だけを用いて作られた論理式を **$\mathcal{L}$-論理式**, 名前による拡張 $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ を用いて作られた論理式を **$\mathcal{L}(\mathcal{M})$-論理式**という.

3 モデルと論理的帰結

この節では特に断らない限り, $\mathcal{L}$ を言語, その $\mathcal{L}$-構造を $\mathcal{M} = \langle M; F \rangle$, および $\mathcal{M}$ についての名前による拡張を $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ とする.

3.1 真理値

定義 14. **(閉項の解釈)**
$\mathcal{L}(\mathcal{M})$ の閉項 t の**解釈** $t^{\mathcal{M}}$ とは次で定まるものである.

1. $t \equiv c$ $(c \in \mathcal{C})$ のとき $t^{\mathcal{M}} := c^{\mathcal{M}}$.

2. $t \equiv f(t_1, \ldots, t_n)$ $(f \in \mathcal{F}_n, n > 0)$ のとき $t^{\mathcal{M}} := f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}, \ldots, t_n^{\mathcal{M}})$.

定義 15. **(閉項の代入)**
自由変数 x を持つ $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-論理式 φ への $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-閉項 t の**代入**とは, φ の自由出現する x をすべて t で置き換えた論理式のことであり, これを $\varphi[x := t]$ と表す.

定義 16. **($\mathcal{L}(\mathcal{M})$-論理式の真理値)**
$\mathcal{L}(\mathcal{M})$-論理式 φ の真理値 $\mathcal{M}(\varphi) \in 2$ [*2] を次で定義する. ここで $t_1, \ldots, t_n$ は項, R は n-項関係, ψ, θ は $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-論理式である.

1. 原子論理式の真理値

   (a) $\mathcal{M}(\perp) := 0$,

[*2] ここで $2 = \{0, 1\}$ である. つまり, 偽を 0, 真を 1 で表している. 集合 $\{0, 1\}$ を 2 で表すことは von Neumann 順序数を学ぶと自然に思われるだろう.

(b) $\mathcal{M}(t_1 = t_2) = 1 :\Longleftrightarrow t_1^{\mathcal{M}} = t_2^{\mathcal{M}}$,

(c) $\mathcal{M}(R(t_1, \ldots, t_n)) = 1 :\Longleftrightarrow (t_1^{\mathcal{M}}, \ldots, t_n^{\mathcal{M}}) \in R^{\mathcal{M}}$,

2. 論理式の真理値

   (a) $\mathcal{M}(\neg\psi) := 1 - \mathcal{M}(\psi)$,

   (b) $\mathcal{M}(\psi \wedge \theta) := \min(\mathcal{M}(\psi), \mathcal{M}(\theta))$,

   (c) $\mathcal{M}(\psi \vee \theta) := \max(\mathcal{M}(\psi), \mathcal{M}(\theta))$,

   (d) $\mathcal{M}(\psi \to \theta) := \max(1 - \mathcal{M}(\psi), \mathcal{M}(\theta))$,

   (e) $\mathcal{M}(\forall x\theta) = 1 :\Longleftrightarrow$ 任意の $m \in |\mathcal{M}|$ について $\mathcal{M}(\psi[x := c_m]) = 1$ が成り立つ,

   (f) $\mathcal{M}(\exists x\theta) = 1 :\Longleftrightarrow$ ある $m \in |\mathcal{M}|$ について $\mathcal{M}(\psi[x := c_m]) = 1$ が成り立つ,

ただし, 真理値が 1 でないときは常に 0 とする.

上記の真理値の定義は名前による拡張 $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ を用いている. すなわち, $\mathcal{L}$-論理式の真理値の定義ではない. しかし, $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}(\mathcal{M})$ であるから $\mathcal{L}$-論理式 φ の真理値は φ を $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-論理式とみなしたときの真理値であると定めることができる.

定義 17. **($\mathcal{L}$-論理式の真理値)**
$\mathcal{L}$-論理式 φ の真理値は φ を $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-論理式とみなしたときの真理値である.

すなわち, $\mathcal{L}$-論理式の真理値は $\mathcal{L}$-構造 $\mathcal{M}$ として何をとるかによって変化する.

3.2 モデルと論理的帰結

定義 18. **($\mathcal{M} \vDash \varphi$)**
$\mathcal{L}$-閉論理式 φ について $\mathcal{M}(\varphi) = 1$ が成り立つことを $\mathcal{M} \vDash \varphi$ と表す.

すなわち, φ で表される性質を $\mathcal{M}$ が満たしていることを $\mathcal{M} \vDash \varphi$ と表す. 論理式の集合を Γ とすると, Γ を適切に選ぶことで満たしてほしい性質を列挙することができる. この Γ をすべて満たすような $\mathcal{L}$-構造を Γ のモデルという.

定義 19. **(モデル)**
$\mathcal{L}$-閉論理式の集合を Γ とする. 任意の $\varphi \in \Gamma$ について $\mathcal{M} \vDash \varphi$ が成り立つとき, $\mathcal{M}$ を Γ **のモデル**という.

さて, 論理式 φ で表現される性質が論理式の集合 Γ によって列挙される性質の論理的帰結であるとはどういうことか. ここで注目しているのは論証の過程ではなく, 論理的帰結であるという結果がすでにわかっているとしたときに何が成り立っているべきであろうかという点である（論証の過程は証明として後ほど扱う）.

手短に言ってしまえば, Γ のモデルとなるいかなる構造 $\mathcal{M}$ も φ を満たすということが要請される. φ が Γ から帰結するのであれば Γ が真となるいかなる場においても φ が真であるということを認めるのは自然であろう.

定義 20. **（論理的帰結）**

$\mathcal{L}$-閉論理式の集合を Γ とする. 任意の Γ のモデル $\mathcal{M}$ が $\mathcal{M} \models \varphi$ を満たすとき φ **は** Γ **の論理的帰結である**という.

4 形式的証明と健全性

この節では証明を形式化し, 証明可能な論理式は論理的帰結になっていることを見る.

4.1 形式的証明

証明を形式的に扱うにあたり, 見通しをよくするために論理記号を減らす. 他の記号は残った記号で定義することで表現することができる.

定義 21. **（論理記号）**

論理記号の集合 $\mathcal{LG}$ は $\{\bot, \to, \exists\}$ のみとし, 他の記号は次で定義する.

$$\neg\varphi := \varphi \to \bot, \tag{9}$$

$$\varphi \lor \psi := \neg\varphi \to \psi, \tag{10}$$

$$\varphi \land \psi := \neg(\varphi \to \neg\psi), \tag{11}$$

$$\varphi \leftrightarrow \psi := (\varphi \to \psi) \land (\psi \to \varphi), \tag{12}$$

$$\forall x\varphi := \neg\exists x\neg\varphi. \tag{13}$$

証明を行うための証明系を定める. 証明系は公理と推論規則から成る. 公理は常に証明として認められる論理式であり, 公理と推論規則により導出できる論理式のみが証明できる論理式であると考える.

定義 22. **（証明系 $\mathcal{H}$）**

t, s とそれに添え字を付したものは閉項, x は変数記号, φ, ψ, θ を論理式, $f \in \mathcal{F}, R \in \mathcal{P}$ とする. 証明系 $\mathcal{H}$ の公理とは, 次の形をした閉論理式であるか, 次の形をした論理式の全称閉包のことである.

1. 公理系

    (a) 命題論理の公理

        i. $\varphi \to \psi \to \varphi$,

        ii. $(\varphi \to \psi \to \theta) \to (\varphi \to \psi) \to \varphi \to \theta$,

        iii. $\neg\neg\varphi \to \varphi$,

    (b) 量化子に関する公理

        i. $\forall x(\varphi \to \psi) \to \forall x\varphi \to \forall x\psi$,

        ii. $\forall x\neg\varphi(x) \to \neg\exists x\varphi(x)$,

        iii. $\varphi(t) \to \exists x\varphi(x)$,

    (c) 等号公理

        i. $t = t$,

        ii. $t = s \to s = t$,

        iii. $(t_1 = t_2 \wedge t_2 = t_3) \to t_1 = t_3$,

        iv. $(t_1 = s_1 \wedge t_2 = s_2 \wedge \cdots \wedge t_n = s_n) \to f(t_1, t_2, \ldots, t_n) = f(s_1, s_2, \ldots, s_n)$,

        v. $(t_1 = s_1 \wedge t_2 = s_2 \wedge \cdots \wedge t_n = s_n) \to R(t_1, t_2, \ldots, t_n) \to R(s_1, s_2, \ldots, s_n)$,

2. 推論規則

    (MP)

$$\frac{\varphi \to \psi \qquad \varphi}{\psi}$$

(MP) の下側の論理式 ψ のことを (MP) の**結論**という.

推論規則の (MP) とは modus ponens の略であり, 上側の論理式 2 つから下側の論理式を導けるということを表す.

定義 23. **(証明)**

$\mathcal{L}$ を言語, $\mathcal{L}$-閉論理式の集合を Σ, φ を $\mathcal{L}$-閉論理式とする. 証明系 $\mathcal{H}$ における**言語 $\mathcal{L}$ についての φ の証明**とは $\mathcal{L}$-閉論理式の有限列,

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \tag{14}$$

で $\varphi_n = \varphi$ であり, $\varphi_i\ (i = 1, 2, \ldots, n-1)$ は Σ の元であるか $\mathcal{H}$ の公理であるか $j, k < i$ なる φ_j, φ_k からの推論規則 (MP) による結論となっているようなものである.

また, Σ からの言語 $\mathcal{L}$ についての φ の証明が存在するとき**言語 $\mathcal{L}$ について φ は Σ から証明可能**といい, $\Sigma \vdash \varphi$ と表す. 特に, $\Sigma = \emptyset$ のとき単に $\vdash \varphi$ と表す.

4.2 演繹定理

次の演繹定理は様々な論理式の証明可能性を示すのに非常に便利な定理である．本節の最初に論理記号 $\mathcal{LG}$ を減らしておいたことで, 次のような定理を見通しよく証明することができる.

定理 24. $\mathcal{L}$ を言語, $\mathcal{L}$-閉論理式の集合を Σ とする．このとき，次が成り立つ．

$$\Sigma \vdash \varphi \to \psi \iff \Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi. \tag{15}$$

Proof. ($\Longrightarrow$)

$\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ かつ $\Gamma \subset \Gamma \cup \{\varphi\}$ より，$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi \to \psi$ が成り立つ．よって，(MP) より $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$.

($\Longleftarrow$)

ψ の種類によって場合分けする.

1. $\psi \in \Gamma$ のとき．$\mathcal{H}$ の公理 (a-i) より $\Gamma \vdash \psi \to \varphi \to \psi$ であり，これと ψ で (MP) を使うことで $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ を得る（注：$\psi \to \varphi \to \psi$ とは $\psi \to (\varphi \to \psi)$ を表すのであった）.
2. ψ が $\mathcal{H}$ の公理のとき．$\Gamma \vdash \psi$ および $\mathcal{H}$ の公理 (a-i) より $\Gamma \vdash \psi \to \varphi \to \psi$ より (MP) を使えば $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ を得る.
3. $\psi \equiv \varphi$ のとき．次の補題 25 で示す.
4. ψ が (MP) の結論になっているとき．$\Gamma \cup \{\varphi\}$ からの ψ の証明の長さに関する帰納法で示す．長さ 1 の時は 1〜3 の場合に相当するから示された．証明の長さが n のとき，ある論理式 θ について $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \theta \to \psi$ および $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \theta$ が成り立っているから帰納法の仮定より, $\Gamma \vdash \varphi \to \theta \to \psi$ および $\Gamma \vdash \varphi \to \theta$ を得る．$\mathcal{H}$ の公理 (a-ii) より, $\Gamma \vdash (\varphi \to \theta \to \psi) \to (\varphi \to \theta) \to \varphi \to \psi$ が成り立つから (MP) を 2 回用いることで結論を得る.

□

補題 25. $\mathcal{L}$ を言語, φ を $\mathcal{L}$-閉論理式とする．このとき, 次が成り立つ.

$$\vdash \varphi \to \varphi. \tag{16}$$

Proof. $\theta \equiv \varphi \to \varphi$ とすると,

$\vdash (\varphi \to \theta \to \varphi) \to (\varphi \to \theta) \to \varphi \to \varphi$,（公理（a-ii））

$\vdash \varphi \to \theta \to \varphi$,（公理（a-i））

$\vdash \varphi \to \varphi \to \varphi$,（公理（a-i））

$\vdash (\varphi \to \theta) \to \varphi \to \varphi$,（（MP）による）

$\vdash \varphi \to \varphi$.（（MP）による）

□

4.3 対偶法

この小節では演繹定理の応用として対偶法を証明する．演繹定理との関連が深いためここで紹介するが, 実際に必要になるのは小節 5.2 であるので, 初読の際は読み飛ばしても問題ない.

補題 26.（二重否定の付与）

$\mathcal{L}$ を言語, φ を $\mathcal{L}$-閉論理式とする．このとき, 次が成り立つ.

$$\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi. \tag{17}$$

Proof. 補題 25 より $\vdash \neg\varphi \to \neg\varphi$ が成り立つから,

$$\{\neg\varphi\} \vdash \neg\varphi, \text{（演繹定理）} \tag{18}$$

$$\{\neg\varphi\} \vdash \varphi \to \bot, \text{（否定の定義）} \tag{19}$$

$$\{\neg\varphi, \varphi\} \vdash \bot, \text{（演繹定理）} \tag{20}$$

$$\{\varphi\} \vdash \neg\varphi \to \bot, \tag{21}$$

$$\{\varphi\} \vdash \neg\neg\varphi, \tag{22}$$

$$\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi. \tag{23}$$

□

補題 27.（対偶法）

$\mathcal{L}$ を言語, φ, ψ を $\mathcal{L}$-閉論理式とする．このとき, 次が成り立つ.

$$\vdash \varphi \to \psi \iff \vdash \neg\psi \to \neg\varphi. \tag{24}$$

Proof. (⟹)

$$\vdash \varphi \to \psi, \tag{25}$$

$$\{\varphi\} \vdash \psi, \text{（演繹定理）} \tag{26}$$

$$\vdash \psi \to \neg\neg\psi, \text{（補題 26（二重否定の付与））} \tag{27}$$

$$\{\varphi\} \vdash \neg\neg\psi, \text{（直前２つで (MP)）} \tag{28}$$

$$\{\varphi, \neg\psi\} \vdash \bot, \text{（演繹定理と否定の定義）} \tag{29}$$

$$\{\neg\psi\} \vdash \neg\varphi, \text{（演繹定理と否定の定義）} \tag{30}$$

$$\vdash \neg\psi \to \neg\varphi. \text{（演繹定理）} \tag{31}$$

(⟸) 上の証明を逆にたどればよい．ただし, 二重否定の付与の代わりに公理（a-iii）二重否定の除去を使用する．

□

4.4 健全性定理

この小節は非常に短いが重要な結果である．次の健全性定理は証明可能な論理式は論理的帰結になっているという主張であり, 証明系が「健全」であることを表す．

大雑把な言い方をすれば証明系の設計がうまくいっているということを表し, その意味で自明な定理である．健全な証明系では証明できることは正しい．一方, 正しいことは証明できるというこの定理の逆は別に証明すべき重要な課題である．

定理 28. $\mathcal{L}$ を言語とし Σ を $\mathcal{L}$-閉論理式の集合, φ を $\mathcal{L}$-閉論理式とする．このとき, 次が成り立つ．

$$\Sigma \vdash \varphi \Longrightarrow \Sigma \vDash \varphi. \tag{32}$$

Proof. 証明系 $\mathcal{H}$ の公理として採用した論理式 φ が $\vDash \varphi$ を満たすことと, (MP) が $\{\varphi, \varphi \to \psi\} \vDash \psi$ を満たすことによる．

□

5 モデルの存在定理と完全性

この節では健全性の逆, すなわち, 論理的帰結は証明できるという定理を示す．この定理を完全性定理という．完全性定理はモデルの存在定理の系として従うため, 実際の目標はモデルの存在定理の証明になる．

この節では特に断りがない限り $\mathcal{L}$ を言語とし, Σ を $\mathcal{L}$-閉論理式の集合とする．

5.1 極大無矛盾集合

定義 29.（無矛盾）

Σ が無矛盾であるとは $\Sigma \nvdash \perp$, すなわち Σ から $\perp$ が証明できないことである.

補題 30. c を $\mathcal{L}$ にない定数記号とし $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{c\}$ とする. このとき, $\mathcal{L}'$-論理式として $\Sigma \vdash \varphi(c)$ ならば $\mathcal{L}$-論理式として $\Sigma \vdash \forall x \varphi(x)$.

Proof. 言語 $\mathcal{L}'$ についての Σ からの $\varphi(c)$ の証明を,

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \tag{33}$$

とする. このとき, $\varphi_n \equiv \varphi(c)$ である.

各論理式 $\varphi_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ において c が出現していれば $\varphi_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ に現れない変数記号 x で書き換え, その各論理式を $\psi_i(x)$ と表す. このとき, $\psi_i(x)$ は $\mathcal{L}$-論理式である. さらに, x が出現する論理式に全称量化子をつけて $\forall x \psi_i(x)$ とする. こうしてできた新しい論理式を φ'_i と表すことにすると,

$$\varphi'_1, \varphi'_2, \ldots, \varphi'_n, \tag{34}$$

は言語 $\mathcal{L}$ についての Σ からの $\forall x \varphi(x)$ の証明である. φ'_i が各 i について証明の条件を満たしていることは次のように確かめられる.

1. φ_i が Σ に含まれるとき

   Σ は $\mathcal{L}$-閉論理式の集合としたから φ_i に c は出現しない. よって, $\varphi_i \equiv \varphi'_i$ となる. したがって, 示すことはない.

2. φ_i が証明系 $\mathcal{H}$ の公理のとき

   証明系 $\mathcal{H}$ の公理の定義より, $\psi_i(x)$ が $\mathcal{H}$ の公理であればその全称閉包である $\forall x \psi_i(x)$ も $\mathcal{H}$ の公理であるからよい.

3. φ_i が $\varphi_j, \varphi_k (j, k < i)$ からの (MP) の結論であるとき

   i 未満の論理式に関しては証明の条件が満たされていると仮定する. また, 与えられた証明において $\varphi_k \equiv \varphi_j \to \varphi_i$ とする. このとき, 帰納法の仮定より $\Sigma \vdash \forall x(\varphi_j(x) \to \varphi_i(x))$ が成り立つから公理（b-i）と (MP) により, $\Sigma \vdash \forall x \varphi_j(x) \to \forall x \varphi_i(x)$ となる. また, 帰納法の仮定より $\Sigma \vdash \forall x \varphi_j(x)$ であるからもう一度 (MP) を用いて $\Sigma \vdash \forall x \varphi_i(x)$ を得る.

□

補題 31.（Henkin の公理の無矛盾性）

$\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{C_{\exists x \varphi(x)}\}$ とし, $\Sigma' = \Sigma \cup \{\exists x \varphi(x) \to \varphi(C_{\exists x \varphi(x)})\}$ とすると, $\mathcal{L}$-閉論理式の集合として Σ が無矛盾であれば, $\mathcal{L}'$-閉論理式の集合として Σ' が無矛盾である.

Proof. 演繹定理と否定の定義により $\Sigma' \vdash \bot \iff \Sigma \vdash \neg(\exists x\varphi(x) \to \varphi(C_{\exists x\varphi(x)}))$ であるから, Σ' が矛盾すると仮定すると,

$$\Sigma \vdash \neg\bigl(\exists x\varphi(x) \to \varphi(C_{\exists x\varphi(x)})\bigr), \tag{35}$$

$$\Sigma \vdash \neg\neg\exists x\varphi(x) \wedge \neg\varphi(C_{\exists x\varphi(x)}), \tag{36}$$

$$\Sigma \vdash \exists x\varphi(x), \tag{37}$$

$$\Sigma \vdash \neg\varphi(C_{\exists x\varphi(x)}), \tag{38}$$

$$\Sigma \vdash \forall x\neg\varphi(x), \text{（補題 30）} \tag{39}$$

$$\vdash \forall x\neg\varphi(x) \to \neg\exists x\varphi(x), \text{（公理（b-ii））} \tag{40}$$

$$\Sigma \vdash \neg\exists x\varphi(x), \text{（前 2 つから (MP)）} \tag{41}$$

$$\Sigma \vdash \exists x\varphi(x) \to \bot, \text{（否定の定義）} \tag{42}$$

$$\Sigma \vdash \bot, \tag{43}$$

により, Σ の無矛盾性に矛盾する.

□

定義 32. $\mathcal{L}$-閉論理式のうち存在量化記号 $\exists$ から始まる論理式の集合を Γ_0 とする.

1. Γ_0 の元を一列に並べ, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots,$ と表す. 定数記号の集合 $\mathcal{C}_0$ を $\mathcal{C}_0 = \{c_{\varphi_1}, c_{\varphi_2}, \ldots\}$ と定める. このとき $\mathcal{L}\cup\mathcal{C}_0$ は新たな言語となるから, $\mathcal{L}\cup\mathcal{C}_0$ の閉論理式のうち存在量化記号 $\exists$ から始まる論理式の集合を Γ_1 とする.

2. $\Gamma_n \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} \Sigma_k$ の元を一列に並べ, $\varphi_1^n, \varphi_2^n, \ldots,$ と表す. 定数記号の集合 $\mathcal{C}_n$ を $C_n = \{c_{\varphi_1^n}, c_{\varphi_2^n}, \ldots\}$ と定める. このとき $\mathcal{L} \cup \mathcal{C}_n$ は新たな言語となるから, $\mathcal{L} \cup \mathcal{C}_n$ の閉論理式のうち存在量化記号 $\exists$ から始まる論理式の集合を Γ_{n+1} とする.

このとき, $\mathcal{L} \cup \bigcup \mathcal{C}_n$ を $\mathcal{L}(\mathcal{C}_H)$ と表し **$\mathcal{L}$ の Henkin 拡大**という.

定義 33. **（極大無矛盾集合）**

Σ^* を $\mathcal{L}$-閉論理式の集合とする. 任意の $\mathcal{L}$-閉論理式 φ について $\varphi \in \Sigma^*$ もしくは $\neg\varphi \in \Sigma^*$ のいずれか一方が成り立つとき Σ^* は**極大無矛盾集合**であるという.

補題 34. **（極大無矛盾集合の構成）**

$\mathcal{L}(\mathcal{C}_H)$-閉論理式の極大無矛盾集合 Σ^* で $\Sigma \subset \Sigma^*$ となるものが存在する.

Proof. Σ に属さない $\mathcal{L}(\mathcal{C}_H)$-閉論理式を順に並べ,

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \tag{44}$$

のように自然数で添え字づける. Σ を次の規則によって拡大する.

$$\Sigma_0 := \Sigma, \tag{45}$$

$$\Sigma_{n+1} := \begin{cases} \Sigma_n \cup \{\varphi_n\} & (\Sigma_n \cup \{\varphi_n\} \nvdash \bot), \\ \Sigma_n \cup \{\neg\varphi_n\} & (\Sigma_n \cup \{\varphi_n\} \vdash \bot). \end{cases} \tag{46}$$

このとき, $\Sigma^* = \bigcup_n \Sigma_n$ とすると Σ^* はその構成法から極大無矛盾集合となる.

□

5.2 モデルの存在定理

定理 35. **(モデルの存在定理)**

$\mathcal{L}$-構造 $\mathcal{M}$ で Σ のモデルとなるものが存在する.

Proof. 補題 34 より $\mathcal{L}(\mathcal{C}_H)$-閉論理式の集合 Σ^* で $\Sigma \subset \Sigma^*$ なる極大無矛盾集合が存在する. これを用いて, 任意の $\mathcal{L}(\mathcal{C}_H)$-閉論理式 φ について,

$$\mathcal{M}(\varphi) = 1 \iff \varphi \in \Sigma^*, \tag{47}$$

なるモデル $\mathcal{M}$ を構成する.

まず, モデルの対象領域 M を定める. $\mathcal{L}$ の Henkin 拡大 $\mathcal{L}(\mathcal{C}_H)$ の閉項全体の集合を $Ct(\mathcal{L}(\mathcal{C}_H))$ と表す. このとき $Ct(\mathcal{L}(\mathcal{C}_H))$ 上の同値関係 $\simeq$ を次で定める. $t, s \in Ct(\mathcal{L}(\mathcal{C}_H))$ として,

$$t \simeq s :\iff (t = s) \in \Sigma^*, \tag{48}$$

とする. 等号公理より $\simeq$ は同値関係となる. さて, 対象領域を $M = Ct(\mathcal{L}(\mathcal{C}_H))/\simeq$ で定め, t を代表元とする M の元を $[t]$ と表す.

M を $\mathcal{L}(\mathcal{C}_H)$-構造にするために, 定数記号, 関数記号, 述語記号の解釈を次で与える. 以下 $t, s, t_1, t_2, \ldots, t_n \in Ct(\mathcal{L}(\mathcal{C}_H))$ とする.

1. 定数記号の解釈

   定数記号 c は $[c]$ で解釈する.

2. 関数記号の解釈

   $f \in \mathcal{F}$ のとき $f^{\mathcal{M}}([t_1], [t_2], \ldots, [t_n]) = [f(t_1, t_2, \ldots, t_n)]$ で定める.

3. 述語記号の解釈

   $R \in \mathcal{P}$ のとき $([t_1], [t_2], \ldots, [t_n]) \in R^{\mathcal{M}} \iff R(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \Sigma^*$ で定める.

2, 3 は等号公理より well-defined となる．

これらの解釈を M 上の部分写像 F で表すことにすれば, $\mathcal{L}(\mathcal{C})$-構造 $\mathcal{M} = \langle M; F \rangle$ を得る．以降では $\mathcal{L}(\mathcal{C}_H)$ を $\mathcal{M}$ の名前によって拡張しておく．ただし, 簡単のため $\mathcal{L}(\mathcal{C}_H)$ と書く．

任意の $\mathcal{L}(\mathcal{C}_H)$-閉論理式 φ について, $\mathcal{M}(\varphi) = 1 \iff \varphi \in \Sigma^*$ が成り立つことは次の補題 36 で示す．これより, $\mathcal{M} \vDash \Sigma^*$ がわかる．

$\Sigma \subset \Sigma^*$ であるから $\mathcal{M} \vDash \Sigma$ となり, よって Σ のモデルを得た． □

補題 36. 各記号および仮定はモデルの存在定理に準じる．このとき, 任意の $\mathcal{L}(\mathcal{C}_H)$-閉論理式 φ について, $\mathcal{M}(\varphi) = 1 \iff \varphi \in \Sigma^*$ が成り立つ．

Proof. 定数記号と関数記号の解釈の定義より $t^{\mathcal{M}} = [t]$ が成り立つことに注意する．

1. 原子閉論理式の場合

   (a) $\varphi \equiv (t = s)$ のとき

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{M}((t = s)) = 1 && (49)\\
\iff\ & t^{\mathcal{M}} = s^{\mathcal{M}} && (50)\\
\iff\ & [t] = [s] && (51)\\
\iff\ & t \simeq s && (52)\\
\iff\ & (t = s) \in \Sigma^*. && (53)
\end{aligned}
$$

   (b) $\varphi \equiv R(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ のとき

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{M}(R(t_1, t_2, \ldots, t_n)) = 1 && (54)\\
\iff\ & (t_1^{\mathcal{M}}, t_2^{\mathcal{M}}, \ldots, t_n^{\mathcal{M}}) \in R^{\mathcal{M}} && (55)\\
\iff\ & ([t_1], [t_2], \ldots, [t_n]) \in R^{\mathcal{M}} && (56)\\
\iff\ & R(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \Sigma^*. && (57)
\end{aligned}
$$

2. 一般の閉論理式の場合

   記号 $\wedge, \vee, \to, \exists, \forall$ の個数に関する帰納法による．記号が $n (n \geq 0)$ 未満の論理式については主張が成り立っていると仮定する． $\wedge, \vee, \to$ に関しては $\mathcal{M}(\varphi S \psi)$ の値の定め方により成り立つ（S は $\wedge, \vee, \to$ のいずれか）．

   (a) 存在量化子から始まる論理式 $\varphi \equiv \exists x \psi(x)$ について

   まず, $\varphi \in \Sigma^* \implies \mathcal{M}(\varphi) = 1$ を示す．補題 31 と補題 27（対偶法）より $\exists x \psi(x) \to \psi(C_{\exists x \psi(x)}) \in \Sigma^*$ であるから (MP) により $\psi(C_{\exists x \psi(x)}) \in \Sigma^*$ である．帰納法の仮定より, $\mathcal{M}(\psi(C_{\exists x \psi(x)})) = 1$ となり, $\mathcal{M}(\varphi)$ の定義より $\mathcal{M}(\exists x \psi(x)) = 1$ が成り立つ．

逆に, $\mathcal{M}(\varphi) = 1 \Longrightarrow \varphi \in \Sigma^*$ を示す. $\mathcal{M}(\varphi) = 1$ のとき, ある $m \in |\mathcal{M}|$ が存在して $\mathcal{M}(\psi(c_m)) = 1$ となる. このとき, 適当な閉項 t を用いて $m = [t]$ と表せるから, $t^{\mathcal{M}} = [t]$ より $\mathcal{M}(\psi(t)) = 1$ となる. 帰納法の仮定より $\psi(t) \in \Sigma^*$ となり, 公理（b-iii）$(\varphi(t) \to \exists x\varphi(x))$ より $\varphi \in \Sigma^*$.

(b) 全称量化子から始まる論理式 $\varphi \equiv \forall x\psi(x)$

まず, $\varphi \in \Sigma^* \Longrightarrow \mathcal{M}(\varphi) = 1$ を示す. 補題 27（対偶法）と公理 (b-ii), (b-iii) により任意の閉項 t について $\vdash \forall x\psi(x) \to \psi(t)$ が成り立つ. $\forall x\psi(x) \in \Sigma^*$ と帰納法の仮定より, 任意の閉項 t について $\mathcal{M}(\psi(t)) = 1$ となる. したがって, $\mathcal{M}(\forall x\psi(x)) = 1$.

最後に, $\varphi \notin \Sigma^* \Longrightarrow \mathcal{M}(\varphi) = 0$ を示す. $\varphi \notin \Sigma^*$ および Σ^* の構成法より $\neg\varphi \in \Sigma^*$ が成り立つ. さらに, 補題 27（対偶法）と公理 (b-ii) より $\vdash \neg\forall x\psi(x) \to \exists x\neg\psi(x)$ であるから (MP) によって $\exists x\neg\psi(x) \in \Sigma^*$. 補題 31 より $\exists x\neg\psi(x) \to \neg\psi(C_{\exists x\neg\psi(x)}) \in \Sigma^*$ であるから (MP) より $\neg\psi(C_{\exists x\neg\psi(x)}) \in \Sigma^*$ となる. よって帰納法の仮定より $\mathcal{M}(\psi(C_{\exists x\neg\psi(x)})) = 0$. よって, $\mathcal{M}(\varphi)$ の定義より $\mathcal{M}(\forall x\psi(x)) = 0$ が成り立つ.

$\square$

5.3 完全性定理

ここまででモデルの存在定理を証明することができたので, 健全性定理の逆を主張する完全性定理を証明することができる. 完全性定理は φ が Σ の論理的帰結であれば必ず Σ から証明することができるという, 証明の表現力が十分に強力であることを主張する定理である.

前節に準じて $\mathcal{L}$ を言語とし, Σ を $\mathcal{L}$-閉論理式の集合とする.

定理 37. （完全性定理）
φ を $\mathcal{L}$-閉論理式とする. このとき, 次が成り立つ.

$$\Sigma \vDash \varphi \Longrightarrow \Sigma \vdash \varphi. \tag{58}$$

Proof. 対偶を示す. $\Sigma \nvdash \varphi$ を仮定する. 演繹定理から $\Sigma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot \Longrightarrow \Sigma \vdash \varphi$ が成り立つからこれの対偶をとって $\Sigma \nvdash \varphi \Longrightarrow \Sigma \cup \{\neg\varphi\} \nvdash \bot$ が成り立つ. すなわち, $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ が無矛盾となる. このとき, モデルの存在定理より $\mathcal{M} \vDash \Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ なる $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ のモデル $\mathcal{M}$ が存在する. $\mathcal{M}$ は $\mathcal{M} \vDash \neg\varphi$ より $\mathcal{M} \nvDash \varphi$ を満たす. すなわち, $\Sigma \nvDash \varphi$.

$\square$

参考文献

[1] 新井敏康，数学基礎論　増補版，東京大学出版会，2021.

[2] ケネス・キューネン, キューネン数学基礎論講義, 日本評論社，2016.

[3] 鹿島亮, 現代基礎数学 15 数理論理学, 朝倉書店, 2009.

[4] Stephen Cole Kleene, Introduction To Meta-Mathematics, Ishi Press Internal, 1952.

[5] Joseph R. Shoenfield, Mathematical Logic, CRC Press, 1967.

[6] Richard E. Hodel, An Introduction to Mathematical Logic, Dover Publications Inc, 1995.