命題論理の健全性と完全性

Atsuyoshi Muta

2021 年 11 月 5 日

1　概要

命題論理の健全性・完全性証明は比較的簡潔にまとめることができる．一方で, 議論の流れは一階述語論理の健全性・完全性証明と大きく違わず, そのため数理論理学の初歩を学ぶのに適している．そこでこの PDF では可能な限り簡潔に命題論理の健全性と完全性を示すことを目指す.

2　論理式・モデル

定義 1. （命題変数）

$A, B, C, \cdots$ のようなアルファベット大文字１文字や，$A_0, A_1, A_2, \cdots$ のようなアルファベット大文字１文字に自然数の添字をつけたものを命題変数と呼ぶ.

定義 2. （論理式）

論理式を以下で定める.

(1) 各命題変数は論理式である.
(2) $\bot$ は論理式である.
(3) 論理式 φ, ψ について，$\neg\varphi, (\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \to \psi)$ は論理式である.
(4) 以上によって論理式とわかるものだけが論理式である.

(, や), も論理式の定義に含まれていることに注意せよ．ただし, 論理式の解釈が一意に定まる範囲で括弧は省略できるものとする.

また, $\wedge, \vee, \to$ のうち２つが連続して並んでいる場合は右側の結合を優先する．すなわち, $\varphi \to \psi \to \theta$ は $\varphi \to (\psi \to \theta)$ を表す.

定義 3. （素論理式）

命題変数全体および $\bot$ の集合を I で表し，素論理式と呼ぶ.

定義 4. （付値）

$2 = \{0, 1\}$ と表す．素論理式 I 上の写像, $\nu : I \to 2$, を**付値**という．ただし, $\nu(\bot) = 0$ で定める.

付値の値は次の規則によって任意の論理式に拡張することができる.

$$\begin{aligned}\nu(\neg\varphi) &:= 1 - \nu(\varphi),\\ \nu(\varphi \wedge \psi) &:= \min(\nu(\varphi), \nu(\psi)),\\ \nu(\varphi \vee \psi) &:= \max(\nu(\varphi), \nu(\psi)),\\ \nu(\varphi \to \psi) &:= \max(1 - \nu(\varphi), \nu(\psi)),\end{aligned}$$

定義 5.（モデル）
論理式の集合を Γ とする. 付値 ν が任意の $\varphi \in \Gamma$ に対して $\nu(\varphi) = 1$ を満たすとき, ν を Γ の**モデル**といい, $\nu \vDash \Gamma$ と表す.
とくに, $\nu \vDash \Gamma$ が成り立つことを **ν が Γ を充足する**という. また, あるモデル ν が存在して $\nu \vDash \Gamma$ となるとき **Γ は充足可能**という.

3 論理的帰結

論理的帰結とは与えられた前提をすべて真とするモデルならば必ず真となるような主張のことをいう. 論理的とは何かという途中経過には触れず, 少なくともこのことが成り立つなら論理的に正しいといってよいだろうという十分条件を採用していることに注意.

定義 6.（論理的帰結）
論理式の集合を Γ とし, φ を論理式とする. Γ を充足する任意の付値 ν が $\nu(\varphi) = 1$ を満たすとき, $\Gamma \vDash \varphi$ と表し **φ は Γ の論理的帰結である**という.
また, $\Gamma = \emptyset$ のとき $\Gamma \vDash \varphi$ を単に $\vDash \varphi$ と表し, このような φ を**トートロジー**という.

4 形式的証明

論理記号は $\bot, \to$ のみとし, その他の論理記号については,

$$\begin{aligned}\neg\varphi &:= \varphi \to \bot,\\ \varphi \vee \psi &:= \neg\varphi \to \psi,\\ \varphi \wedge \psi &:= \neg(\varphi \to \neg\psi),\end{aligned}$$

で定める.

定義 7.（証明系 $\mathcal{H}$）
証明系 $\mathcal{H}$ は次の公理と推論規則からなる.

公理：

(1) $\varphi \to \psi \to \varphi$,

(2) $(\varphi \to \psi \to \theta) \to (\varphi \to \psi) \to \varphi \to \theta$,

(3) $\neg\neg\varphi \to \varphi$.

推論規則：

(MP)

$$\frac{\varphi \to \psi \qquad \varphi}{\psi}$$

ここで, (MP) は $\varphi \to \psi, \varphi$ から ψ を結論することができることを表し, 下側の論理式 ψ を **(MP) の結論**という.

定義 8. **（証明・証明可能）**

Γ を論理式の集合, φ を論理式とする．証明系 $\mathcal{H}$ における **Γ からの φ の証明**とは論理式の有限列,

$$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n,$$

で $\varphi_n = \varphi$ であり, $\varphi_i\,(i = 1, 2, \cdots, n-1)$ は Γ の元であるか $\mathcal{H}$ の公理であるか $j, k < i$ なる φ_j, φ_k からの (MP) の結論となっているようなものである.

また, Γ からの φ の証明が存在するとき **φ は Γ から証明可能**といい, $\Gamma \vdash \varphi$ と表す．Γ が空集合のとき, $\Gamma \vdash \varphi$ を $\vdash \varphi$ と表す.

5 健全性定理

これ以降では Γ は論理式の集合を表し, φ, ψ は論理式を表すことにする．まず, 推論規則 (MP) が正しさを保存することをみよう.

補題 9. $\{\varphi \to \psi, \varphi\} \vDash \psi$.

Proof. $\{\varphi \to \psi, \varphi\}$ を満たす任意の付値を ν とする.

このとき，$\nu(\varphi \to \psi) = \max(1 - \nu(\varphi), \nu(\psi)) = 1$, $\nu(\varphi) = 1$, が共に成り立つ．よって，$1 - \nu(\varphi) = 0$ より $\nu(\psi) = 1$ でなくてはならない. □

定理 10. **（健全性定理）**

$$\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \vDash \varphi.$$

Proof. 証明系 $\mathcal{H}$ の公理がすべてトートロジーであることと, 補題 9 より成り立つ. □

このように健全性は容易に導ける．なぜなら, 証明系 $\mathcal{H}$ が健全性を持つように設計されているからである．健全性は証明体系が証明体系として「健全に」機能するために必要な性質であって，当然成り立つべきものなのである (証明できるのに正しくない命題があるような体系は問題があるだろう).

6　完全性定理

完全性定理は健全性定理ほど自明ではない．論理的帰結は必ず証明できるという証明体系の表現力を確かめる定理である．健全に作った証明系がどの程度の表現力を持つか確かめたところ, すべての論理的帰結を示せるという「完全」な表現力を持っていたことがわかったという定理である.

完全性定理は演繹定理とモデルの存在定理の２つを示すと容易に導くことができる.

定理 11.（演繹定理）

$$\Gamma \vdash \varphi \to \psi \iff \Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi.$$

Proof. ($\Longrightarrow$)
$\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ かつ $\Gamma \subset \Gamma \cup \{\varphi\}$ より，$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi \to \psi$ が成り立つ．よって, (MP) より $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$.

($\Longleftarrow$)
ψ の種類によって場合分けする.

[1] $\psi \in \Gamma$ のとき．$\mathcal{H}$ の公理 (1) より $\Gamma \vdash \psi \to \varphi \to \psi$ であり，これと ψ で (MP) を使うことで $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ を得る（注：$\psi \to \varphi \to \psi$ とは $\psi \to (\varphi \to \psi)$ を表すのであった）.

[2] ψ が $\mathcal{H}$ の公理のとき．$\Gamma \vdash \psi$ および $\mathcal{H}$ の公理 (1) より $\Gamma \vdash \psi \to \varphi \to \psi$ より (MP) を使えば $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ を得る.

[3] $\psi \equiv \varphi$ のとき. 次の補題 12 で示す.

[4] ψ が (MP) の結論になっているとき.

$\Gamma \cup \{\varphi\}$ からの ψ の証明の長さに関する帰納法で示す．長さ 1 の時は以上の場合に相当するから示された.

証明の長さが n のとき，ある論理式 θ について $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \theta \to \psi$ および $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \theta$ が成り立っているから帰納法の仮定より, $\Gamma \vdash \varphi \to \theta \to \psi$ および $\Gamma \vdash \varphi \to \theta$ を得る. $\mathcal{H}$ の公理 (2) より, $\Gamma \vdash (\varphi \to \theta \to \psi) \to (\varphi \to \theta) \to \varphi \to \psi$ が成り立つから (MP) を２回用いることで結論を得る. □

補題 12.

$$\vdash \varphi \to \varphi.$$

Proof. $\theta = \varphi \to \varphi$ とする.

$\mathcal{H}$ の公理 (2) より，$\vdash (\varphi \to \theta \to \varphi) \to (\varphi \to \theta) \to \varphi \to \varphi$, が成り立つ．また，$\mathcal{H}$ の公理 (1) より, $\vdash \varphi \to \theta \to \varphi$,$\vdash \varphi \to \varphi \to \varphi$ が成り立つから (MP) を２回使えばよい. □

定義 13.（矛盾・無矛盾）

Γ が $\perp$ を導くとき，つまり $\Gamma \vdash \perp$ となるとき Γ **は矛盾する**という．Γ が矛盾しないとき Γ **は無矛盾である**という.

定理 14.（モデルの存在定理）
論理式の集合 Γ が無矛盾であるとき, $\nu \vDash \Gamma$ なる付値 ν が存在する.

Proof. (1) 極大無矛盾集合の構成.
素論理式の集合 I は可算であったからそこから作られる論理式全体の集合も可算となるため，論理式全体を $A_0, A_1, A_2, \cdots,$ と一列に並べる．このとき，論理式の集合の増加列 $\{T_n\}$ を次で定める.

$$T_0 := \Gamma,$$
$$T_{n+1} := \begin{cases} T_n \cup \{A_n\}, & (T_n \cup \{A_n\} \text{ が無矛盾のとき}) \\ \\ T_n \cup \{\neg A_n\}. & (T_n \cup \{A_n\} \text{ が矛盾するとき}) \end{cases}$$

定義より各 n について T_n は無矛盾であり，したがって $T = \bigcup_n T_n$ も無矛盾である．実際，T が矛盾したと仮定すると，証明の定義から $S \subset T$ なる有限部分集合 S が存在して $S \vdash \bot$ となる．このとき，ある n について $S \subset T_n$ となるが，これは $T_n \vdash \bot$ を意味し，T_n の無矛盾性に矛盾する.
また，構成法より T は次の性質を満たす．任意の論理式φ について,$\varphi \in T$ または$\neg\varphi \in T$. この性質を極大性という.
(2) モデルの構成.
付値 ν を,

$$\nu(A) := \begin{cases} 1, & (A \in T \text{ のとき}) \\ \\ 0, & (\neg A \in T \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定める.
このとき，任意の論理式 φ について $\nu(\varphi) = 1 \iff \varphi \in T$ が成り立つ．これは T の極大性と無矛盾性，演繹定理を用いることによって示される．ここで $\Gamma \subset T$ であるから ν は Γ のモデルである. □

定理 15.（完全性定理）

$$\Gamma \vDash \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi.$$

Proof. $\Gamma \nvdash \varphi$ とする．このとき，演繹定理より，$\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \nvdash \bot$ となる．よって，モデルの存在定理より $\nu \vDash \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ なる付値 ν が存在する．この ν は $\nu \nvDash \varphi$ を満たす．したがって，$\Gamma \nvDash \varphi$. □

以上で命題論理の完全性定理の証明が完了した.

参考文献

[1] 新井敏康，数学基礎論　増補版，東京大学出版会，2021.

[2] ケネス・キューネン, キューネン数学基礎論講義, 日本評論社，2016.

[3] 鹿島亮, 現代基礎数学 15 数理論理学, 朝倉書店, 2009.