一階述語論理の定義

牟田篤兄

2021 年 7 月 31 日

本 PDF は「キューネン数学基礎論講義（日本評論社）」における, 一階述語論理（本文中では 1 階論理と呼ばれる）の定義とそれに関連して必要となるすべての用語の定義をまとめたものである.

定義. I.10.1
x の**冪集合** $\mathcal{P}(x)$ とは $\{z : z \subseteq x\}$ のことである.

定義. I.10.2
B^A あるいは ${}^A B$ とは, $\mathrm{dom}(f) = A$ と $\mathrm{ran}(f) \subseteq B$ をみたす函数 f 全体からなる集合とする.

定義. I.10.3
$A^{<\alpha} = {}^{<\alpha}A = \bigcup_{\xi<\alpha} A^{\xi}$.

定義. II.4.1
ポーランド記法における**語彙**とは対 $(\mathcal{W}, \alpha)$ であり, この $\mathcal{W}$ は記号の集合, また α は函数 $\alpha : \mathcal{W} \to \omega$ である. $\mathcal{W}_n = \{s \in \mathcal{W} : \alpha(s) = n\}$ とし, $\mathcal{W}_n$ に属する記号はアリティ n をもつということにする. 定義 I.10.3 で定めたとおり $\mathcal{W}^{<\omega}$ は $\mathcal{W}$ に属する記号からなる有限列の全体であるものとする. そのような列のうち $(\mathcal{W}, \alpha)$ の**式** (または**整形式**ともいう) とは,

$$s \in \mathcal{W}_n \text{であり各} \quad i < n \text{について} \quad \tau_i \text{が式であるとき}, s\tau_0 \cdots \tau_{n-1} \text{も式である}$$

なる規則に則って構成されたもののことをいう.

定義. II.4.4
σ を語彙 $(\mathcal{W}, \alpha)$ の式とするとき, σ の**部分式**とは σ の中のひとつながりの部分列でそれ自身が式であるもののことをいう.

定義. II.4.6
語彙 $(\mathcal{W}, \alpha)$ の式 σ のある記号のある出現位置について, その**スコープ**とは, σ のその位置から始まる一意的な部分式のことをいう.

定義．II.5.1

論理記号とは次の 8 つの記号,

$$\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists, =,$$

と, それに加えて可算無限個の変数である．変数全体の集合を VAR と書く．通常, u, v, w, x, y, z に必要に応じて添字をつけたもので変数をあらわすものとする．

定義．II.5.2

述語論理の**語彙**とは, **論理外記号**の集合 $\mathcal{L}$ のことで, この $\mathcal{L}$ は二つの互いに交わらない集合 $\mathcal{F}$(**函数記号**の全体) と $\mathcal{P}$(**述語記号**の集合) に分割される．$\mathcal{L}$ と $\mathcal{P}$ はいずれも**アリティ**に応じて $\mathcal{F} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{F}_n$, $\mathcal{P} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{P}_n$ と分割される．$\mathcal{F}_n$ に属する記号は n 変数函数記号と呼ばれる．$\mathcal{P}_n$ に属する記号は n 項述語記号と呼ばれる．とくに, $\mathcal{F}_0$ に属する記号は**定数記号**と呼ばれ, $\mathcal{P}_0$ に属する記号は**命題定項**と呼ばれる．

定義．II.5.3

語彙 $\mathcal{L} = \mathcal{F} \cup \mathcal{P} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{F}_n \cup \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{P}_n$ が定義 II.5.2 のとおりに与えられたとするとき,

(1) $\mathcal{L}$ の**項**とは定義 II.4.1 にいう意味でのポーランド記法の語彙 $\mathcal{F} \cup \mathrm{VAR}$ の整形式のこと．ただし, VAR に属する記号のアリティは 0 で, $\mathcal{F}_n$ に属する記号のアリティは n であるものとする．

(2) $\mathcal{L}$ の**原子論理式**とは, $p\tau_1 \cdots \tau_n$ の形の記号列で, $n \leq 0$ であり, $\tau_1, \cdots, \tau_n$ は $\mathcal{L}$ の項であって, $p \in \mathcal{P}_n$ であるもの, または, $n = 2$ であって p が等号 $=$ であるもののこと．

(3) $\mathcal{L}$ の**論理式**とは, 次のルールで構成される記号列のこと：

a. 原子論理式は論理式である．

b. φ が論理式で $x \in \mathrm{VAR}$ のとき $\forall x\varphi$ と $\exists x\varphi$ も論理式である．

c. φ が論理式のとき $\neg\varphi$ も論理式である．

d. φ と ψ が論理式のとき $\vee\varphi\psi$ も $\wedge\varphi\psi$ も $\leftrightarrow \varphi\psi$ も論理式である．

補題．II.5.4

論理式 φ においては, $\mathcal{P} \cup \{\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists, =\}$ に属する記号のどの出現スコープも論理式であり, $\mathcal{F} \cup \mathrm{VAR}$ に属する記号のいかなる出現スコープも項である．

定義．II.5.5

論理式 φ 中の変数 y が**束縛されている**とは, この出現箇所が, y に作用する（すなわち直後に y が続くような）$\forall$ か $\exists$ のスコープの内に含まれていることでる．束縛されていない出現のことを　**自由な**出現という．自由な変数が 1 つもない論理式のことを**文**という．

定義. II.5.6

論理式 φ の**全称閉包**とは, $\forall x_1 \cdots \forall x_n \varphi, n \geq 0$ の形の任意の**文**のことである.

参考文献

[1] ケネス・キューネン著, 藤田博司訳『キューネン数学基礎論講義（日本評論社, 2016）』