位相空間論による命題論理のコンパクト性定理

Atsuyoshi Muta

2021 年 7 月 31 日

1　概要

命題論理のコンパクト性定理は, 位相空間論を用いればその名の通りコンパクト性に関する性質として見ることができる．この PDF では完全性定理を使用せずに位相空間論に関する知識から直接命題論理のコンパクト性定理を示す（この方法は [1] に演習問題として紹介されていた方法をまとめたものである).

2　有限交叉性

まず, コンパクト性を有限交叉性を用いた同値な命題で表せることを確かめる.

定義 1. 有限交叉性

集合 S の部分集合族 $\mathcal{F}$ が有限交叉性を持つとは, 任意の $\mathcal{F}$ の有限部分集合 $\{S_1, S_2, \cdots, S_n\}$ が,

$$S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n \neq \emptyset,$$

を満たすことである.

命題 2. X を位相空間とする．このとき, 次の 2 条件は同値である.

(1) X はコンパクト.

(2) X の任意の閉集合族 $\mathcal{C}$ が有限交叉性を持つならば,

$$\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \neq \emptyset,$$

が成り立つ.

Proof. (1)

$\Longleftrightarrow$ X の任意の開集合族 $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ について, $\bigcup O_\lambda = X$ を満たすならばある有限部分集合族 $\{O_{\lambda_1}, O_{\lambda_2}, \cdots, O_{\lambda_n}\}$ があって $\bigcup_{k\leq n} O_{\lambda_k} = X$.

$\overset{\text{対偶}}{\Longleftrightarrow}$ X の任意の開集合族 $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ について, 任意の有限部分集合族 $\{O_{\lambda_1}, O_{\lambda_2}, \cdots, O_{\lambda_n}\}$ が $\bigcup_{k\leq n} O_{\lambda_k} \neq X$ を満たすならば $\bigcup O_\lambda \neq X$.

$\Longleftrightarrow$ X の任意の閉集合族 $\{C_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ について, 任意の有限部分集合族 $\{C_{\lambda_1}, C_{\lambda_2}, \cdots, C_{\lambda_n}\}$ が $\bigcap_{k\leq n} C_{\lambda_k} \neq \emptyset$ を満たすならば $\bigcap C_\lambda \neq \emptyset$.

$\Longleftrightarrow$ (2). □

3 命題論理のコンパクト性定理

命題記号の集合を $\mathcal{P}_0$ とする. このとき, 命題論理の真理値割り当ては $2^{\mathcal{P}_0}$ で表される. そこで, $2 = \{0, 1\}$ に離散位相を入れた場合, Tychonoff の定理より $2^{\mathcal{P}_0}$ はコンパクトである.

以上の議論から次を結果を得る.

定理 3. 命題論理のコンパクト性定理

Γ を命題論理の論理式の集合とする. Γ が有限充足可能ならば充足可能.

Proof. φ を論理式とし, $F_\varphi = \{\mathfrak{A} \in 2^{\mathcal{P}_0} : \mathfrak{A} \models \varphi\}$ とする.

Γ が有限充足可能であることより $\{F_\varphi : \varphi \in \Gamma\}$ は有限交叉性を持つ. したがって,

$$\bigcap_{\varphi\in\Gamma} F_\varphi \neq \emptyset,$$

が成り立つ. すなわち, Γ は充足可能.

□

参考文献

[1] ケネス・キューネン, 『キューネン数学基礎論講義』, 日本評論社.